

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗА УРОЖАЙНОСТИ

Лихацевич¹ А. П., Малышко² А. В.

*докт. техн. наук, профессор, чл.-корр. НАН Беларуси, гл. научн. сотр.
РУП «Институт мелиорации», Минск, Беларусь, alikhatsevich@mail.ru*

*зав. отделом минерального питания РУП «Научная станция по сахарной свекле»
Несвиж, Беларусь, talyschko@mail.ru*

Анализ требований к математическому моделированию, изложенных в справочной литературе, позволил сформулировать общее определение: обобщенная математическая модель объекта исследований – это математическое выражение, построенное с соблюдением баланса размерностей, содержательно отражающее свойства изучаемого объекта и количественные связи, его характеризующие. Каждый элемент математической модели, включая численные коэффициенты, должен иметь объяснимое физическое содержание.

Рассмотрены разные математические модели урожайности в виде дифференциальных уравнений с поэтапно рассчитываемым приростом урожайности культуры в процессе вегетации, предлагаемые известными учеными: академиком С. Ф. Аверьяновым и его учеником В. В. Шабановым (Россия, 1973), академиком Г. И. Афанасиком (Беларусь, 1977), профессором В. А. Поповым (Россия, 1997), профессором Л. В. Кирейчевой и ее учеником А. В. Ромко (Россия, 2007). Однако все эти модели до настоящего времени не получили какого-либо применения при статистической обработке как опытных, так и производственных данных урожайности. Об этом свидетельствуют более поздние работы, в которых используются модели урожайности в виде обычных эмпирических уравнений, построенные с привлечением эмпирико-статистических методик обработки данных опыта.

Оценивая подобный эмпирический подход, некоторые исследователи считают, что при любом коэффициенте детерминации такие эмпирические уравнения не являются действительными моделями исследуемого процесса, поскольку не имеют физического смысла, а представляют собой лишь формальное математическое сглаживание данных конкретных экспериментов. Использовать эти эмпирические формулы можно только в пределах конкретного опыта (участка, поля), где получены исходные данные для анализа. Однако учитывая то, что в настоящее время в агротехнологической науке не завершено формирование терминологии в области моделирования, полагаем, что связь урожайности сельскохозяйственных культур с урожаяформирующими факторами, представляемую в виде алгебраических полиномов, не имеющих так называемого «физического смысла», все же можно называть частными математическими моделями.

Исходя из требования обязательной опоры математического моделирования объекта исследований на относящийся к нему общий физический закон, в качестве методологической основы моделирования урожайности нами использован

физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе (causal interaction). Формальным выражением данного физического принципа применительно к модели урожайности является дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = \alpha_i f_i \left(\frac{Y}{R_i} \right) \frac{g_i(R_i)}{h_i(R_{i(extr)})}, \quad (1)$$

где $\partial Y/\partial R_i$ – частная производная урожайности (Y) по i -му урожаеформирующему фактору (R_i), соответствующая интенсивности изменения Y при изменении R_i , при условии, что другие факторы (аргументы функции) не изменяются; Y – урожайность; R_i – обобщенное представление i -го урожаеформирующего фактора; α_i – безразмерный коэффициент, характеризующий восприимчивость урожая к действию i -го фактора; $f_i(Y/R_i)$ – функция, характеризующая реакцию урожайности на влияние i -го фактора в пределах рассматриваемого диапазона его воздействия; $g_i(R_i)$ – функция, характеризующая величину стресса растений при отклонении i -го фактора (R_i) от оптимального уровня (R_{opt}); $h_i(R_{i(extr)})$ – функция, характеризующая экстремальный стресс от воздействия i -го фактора, приводящий к потере урожая.

Решение (1) получено в виде мультипликативной функции, которая является простейшей моделью урожайности

$$\frac{Y}{Y_{max[n]}} = \left[1 - a_1 \left(\frac{R_{1(opt)} - R_1}{R_{1(opt)} - R_{1(0)}} \right)^2 \right] \left[1 - a_2 \left(\frac{R_{2(opt)} - R_2}{R_{2(opt)} - R_{2(0)}} \right)^2 \right] \dots \left[1 - a_n \left(\frac{R_{n(opt)} - R_n}{R_{n(opt)} - R_{n(0)}} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где Y – фактическая урожайность; a_1, a_2, a_n – коэффициенты, характеризующие степень влияния на урожайность 1-го, 2-го, ... n -го урожаеформирующих факторов, соответственно (безразмерные величины); $R_{1(opt)}, R_{2(opt)}, R_{n(opt)}$ – оптимальные количества 1-го, 2-го, ... n -го урожаеформирующих факторов, соответственно, при которых достигается максимум урожайности; $R_{1(0)}, R_{2(0)}, R_{n(0)}$ – количества 1-го, 2-го, ... n -го урожаеформирующих факторов, соответственно, при которых урожай не формируется.

Справедливость формулы (2) подтверждена 13-летними данными (2011–2023 гг.), полученными на Молодечненской ГСХУ при сортоиспытании сахарной свеклы (гибрид NZ-тип). В исходной информации помимо урожайности сахарной свеклы присутствовали семь урожаеформирующих факторов: pH, гумус (G), K_2O , P_2O_5 , NPK, среднесуточные температуры воздуха и атмосферные осадки, которые являются показателем тепло- и влагообеспеченности растений. Анализ показал, что иерархию влияния урожаеформирующих факторов, начиная от главного фактора и завершая наименее значительным, можно представить последовательностью:

$$G \rightarrow K_2O \rightarrow NPK \rightarrow t(VI) \rightarrow S(V-VII) \rightarrow P_2O_5 \rightarrow pH. \quad (3)$$

Как видим, четверка из важнейших агрохимических показателей почвы (pH, гумус (G), K_2O , P_2O_5 и вносимых NPK) выстраивается для сахарной свеклы вполне однозначно:

$$G \rightarrow K_2O \rightarrow NPK \rightarrow P_2O_5. \quad (4)$$

Расчеты по (2) с использованием очередности (4) показали, что урожайность сахарной свеклы, возделываемой в условиях Молодечненской ГСХУ, можно прогнозировать в начале вегетационного периода с точностью $R^2 = 0,94$ при среднеквадратическом отклонении значений прогнозируемой урожайности от фактической около $\pm 2,7$ т/га. Результаты расчета будут справедливы в ограниченной области значений урожаяформирующих факторов и урожайности, установленных по методике планирования эксперимента (таблица).

Таблица – Граничные значения урожайности и урожаяформирующих факторов (допустимый интервал варьирования)

Показатели		Y _{изм.} , т/га	Агрохимические показатели почвы			NPK, кг д. в./га	Ср. сут. температ., °C	Атмосферные осадки, мм
			G, %	K ₂ O, мг/кг	P ₂ O ₅ , мг/кг		VI	V-VII
Границы варьирования	min	35,6	3,40	314	310	300	15,1	121
	max	80,2	3,62	350	335	390	25,1	273
Основной уровень		57,9	3,51	332	332,5	345	20,1	197
Интервал варьирования		22,3	0,11	10	12,5	45	5	76
Область определения	min	24,5	3,35	310	304	278	13	83
	max	91,4	3,68	340	341	413	28	311

Поскольку предложенная математическая модель урожайности состоит из блоков в безразмерной форме, то блоки модели (2), относящиеся к каждому урожаяформирующему фактору, являются критериями подобия. Это позволяет сравнивать между собой результаты математического моделирования урожайности любой сельскохозяйственной культуры на почвах с любыми агрохимическими свойствами, делая при этом вполне обоснованные выводы.