

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА С РЕГУЛИРУЕМОЙ СКОРОСТЬЮ

О. Н. Прокопеня<sup>1</sup>, Л. И. Вабищевич<sup>2</sup>, А. В. Францевич<sup>3</sup>,  
О. Г. Прожизко<sup>4</sup>, А. С. Лапука<sup>5</sup>

<sup>1</sup> К. т. н., доцент, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : olegprokopenya@mail.ru

<sup>2</sup> К. т. н., доцент, доцент кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : vabik1948@mail.ru

<sup>3</sup> Магистр, аспирант кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : alex.favg@gmail.com

<sup>4</sup> Магистр, аспирант кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : prozhizhko\_og@mail.ru

<sup>5</sup> Ассистент кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail : saluzung@mail.ru

### Реферат

Для приводов постоянного тока, входящих в состав промышленных роботов, является актуальной проблема оптимизации по критерию минимальных потерь энергии, поскольку данные приводы работают с частыми пусками и торможениями, во время которых имеют место повышенные потери энергии.

В данной статье предлагается решение задачи оптимизации привода постоянного тока с регулируемой скоростью. Получены аналитические зависимости для расчета оптимальных коэффициентов в цепях обратной связи. С помощью математической модели исследовано влияние матриц критерия оптимизации на качество переходных процессов и потери энергии. Предложены рекомендации по выбору данных матриц при проектировании оптимальных приводов.

**Ключевые слова:** привод постоянного тока, регулирование скорости, оптимальный привод.

### OPTIMIZATION OF DIRECT CURRENT DRIVE WITH SPEED CONTROL

O. N. Prokopenya, L. I. Vabishchevich, A. V. Francevich, O. G. Prozhizhko, A. S. Lapuka

### Abstract

For DC drives included in industrial robots, the problem of optimization according to the minimum loss criterion is urgent, since these drives operate with frequent starts and braking, during which there are increased energy losses.

This article offers a solution to the problem of optimizing the DC drive with adjustable speed. Analytical dependencies were obtained to calculate optimal coefficients in feedback circuits. With the help of a mathematical model, the influence of the optimization criterion matrices on the quality of transient processes and energy loss was determined. Recommendations on selection of these matrices during design of optimal drives are proposed.

**Keywords:** DC drive, speed control, optimal drive.

### Введение

Приводы постоянного тока широко применяются в составе промышленных роботов. Для них является характерным повторно-кратковременный режим работы с частыми пусками и торможениями. Известно, что при переходных процессах имеет место рост потерь энергии в обмотках двигателя, что обусловлено повышением тока относительно номинального значения, а потери пропорциональны квадрату тока. В этой связи для данных приводов актуальна проблема оптимизации по критерию, обеспечивающему минимальные потери энергии при заданном качестве переходных процессов. На практике задача поиска оптимального управления обычно решается для линейного объекта с использованием квадратичного критерия [1, 2] и именуется аналитическим конструированием регулятора.

Попытка решения данной задачи была предпринята авторами [3]. В данной работе выполнен количественный анализ влияния входящей в критерий оптимизации матрицы R на затраты энергии в переходном процессе применительно к конкретному приводу постоянного тока при фиксированных значениях матрицы Q. Однако представляет интерес оценка влияния отдельных коэффициентов матрицы Q, а также получение аналитических зависимостей для расчета оптимальных значений коэффициентов обратной связи по переменным состояниям, что позволяет построить оптимальный привод. Данная работа посвящена решению указанной проблемы.

### Постановка задачи

На основе аналитического решения оптимизационной задачи для привода постоянного тока с регулируемой скоростью необходимо получить математические зависимости, позволяющие рассчитывать оптимальные значения коэффициентов обратной связи по скорости и току двигателя при заданных значениях матриц, входящих в критерий оптимизации. Далее с помощью математической модели необходимо исследовать влияние коэффициентов данных матриц на показатели качества переходного процесса и потери в приводе. Это позволит выработать практические рекомендации по выбору коэффициентов данных матриц при расчете оптимального привода и реализовать привод на практике.

### Решение задачи оптимизации

Динамика привода постоянного тока при угловой скорости в качестве выходной переменной и работе в режиме идеального холостого хода описывается уравнениями

$$J_{\text{пр}} \cdot \dot{\omega} = c_M \cdot I_{\text{я}}, \quad (1)$$

$$L_{\text{я}} \cdot \dot{I}_{\text{я}} + R_{\text{я}} \cdot I_{\text{я}} + c_e \cdot \omega = k_U U_{\text{я}}, \quad (2)$$

где  $\omega$  – угловая скорость двигателя;

$I_{\text{я}}$  – ток якоря двигателя;

$J_{\text{пр}}$  – приведенный к валу двигателя момент инерции привода;

$L_{я}$  – индуктивность обмотки якоря;  
 $k_y$  – коэффициент передачи силового преобразователя;  
 $c_m$  и  $c_e$  – постоянные двигателя.

При их приведении к виду уравнений состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

матрицы объекта имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_m}{J_{ПП}} \\ -\frac{c_e}{L_{я}} & -\frac{R_{я}}{L_{я}} \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_y}{L_{я}} \end{bmatrix}; \tag{5}$$

где  $A$  и  $B$  – матрицы объекта.

Критерий качества регулирования

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (u^T R u + x^T Q x) dt \tag{6}$$

где  $R$  – симметричная, положительно-определенная матрица весовых коэффициентов, определяющих затраты на управление;

$Q$  – симметричная, неотрицательно-определенная матрица весовых коэффициентов, определяющих качество переходного процесса.

Минимальное значение критерия, соответствующее оптимальному управлению, ищется в виде квадратичной формы

$$I^* [x(t), t] = x^T P(t) x, \tag{7}$$

где  $P(t)$  – весовая матрица.

Решением задачи нахождения минимума критерия является закон оптимального управления

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t), \tag{8}$$

При этом матрица  $P(t)$  находится из решения матричного нелинейного дифференциального уравнения Риккати [2]

$$-\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q. \tag{9}$$

Для получения стационарной системы в законе управления (8) используем установившееся решение уравнения (9), которое обозначаем  $\bar{P}$  и находим его как решение алгебраического уравнения

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0. \tag{10}$$

При этом закон управления

$$u^*(t) = -Kx(t), \tag{11}$$

где  $K = -R^{-1} B^T \bar{P}$ .

Для системы с одним входом матрица  $R$  состоит из одного элемента. Обозначим

$$R = [r]. \tag{12}$$

С учетом (5) и (12) закон управления

$$u^* = -\frac{k_y}{rL_{я}} p_{12} \omega - \frac{k_y}{rL_{я}} p_{22} I_{я} = -k_1 \omega - k_2 I_{я} \tag{13}$$

Таким образом, для построения оптимальной системы требуется найти только двух элементов  $p_{12}$  и  $p_{22}$  матрицы  $\bar{P}$ .

Матрицу  $Q$ , входящую в критерий (5), принимаем в виде

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Уравнение (10) после подстановки матриц (4), (5), (12), (14) приводится к виду

$$\begin{bmatrix} \frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{12}^2 + \frac{2c_e}{L_{я}} p_{12} - q_{11} & \frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{12} p_{22} - \frac{c_m}{J_{PP}} p_{11} + \frac{R_{я}}{L_{я}} p_{12} + \frac{c_e}{L_{я}} p_{22} \\ \frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{12} p_{22} - \frac{c_m}{J_{PP}} p_{11} + \frac{R_{я}}{L_{я}} p_{12} + \frac{c_e}{L_{я}} p_{22} & \frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{22}^2 + \frac{2R_{я}}{L_{я}} p_{22} - \frac{2c_m}{J_{PP}} p_{12} - q_{22} \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

Для нахождения  $p_{12}$  и  $p_{22}$ , которые входят в закон управления (13), достаточно приравнять к нулю элементы на главной диагонали (15)

$$\frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{12}^2 + \frac{2c_e}{L_{я}} p_{12} - q_{11} = 0; \tag{16}$$

$$\frac{k_y^2}{rL_{я}^2} p_{22}^2 + \frac{2R_{я}}{L_{я}} p_{22} - \frac{2c_m}{J_{PP}} p_{12} - q_{22} = 0 \tag{17}$$

Из (16) и (17) находим

$$p_{12} = \frac{rL_{я}}{k_y} \left( \sqrt{c_e^2 + k_y^2 q_{11} / r} - c_e \right), \tag{18}$$

$$p_{22} = \frac{rL_{я} R_{я}}{k_y^2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2c_m L_{я} k_y}{J_{PP} R_{я}^2} \cdot k_1 + \frac{k_y^2}{R_{я}^2} \frac{q_{22}}{r}} \right), \tag{19}$$

Из (13) с учетом (18), (19) получаем

$$k_1 = \frac{1}{k_y} \left( \sqrt{c_e^2 + k_y^2 q_{11} / r} - c_e \right), \tag{20}$$

$$k_2 = \frac{R_{я}}{k_y} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2c_m L_{я} k_y}{J_{PP} R_{я}^2} \cdot k_1 + \frac{k_y^2}{R_{я}^2} \frac{q_{22}}{r}} \right), \tag{21}$$

Определение коэффициентов обратной связи по (20), (21) обеспечивает получение оптимальной системы. Из (20), (21) следует, что данные коэффициенты определяются не абсолютными значениями коэффициентов матриц  $Q$  и  $R$ , а отношениями  $q_{11}/r$  и  $q_{22}/r$ .

#### Методика исследований

Для оценки показателей качества переходного процесса и потерь энергии разработана математическая модель привода в приложении Simulink, которая приведена на рисунке 1.

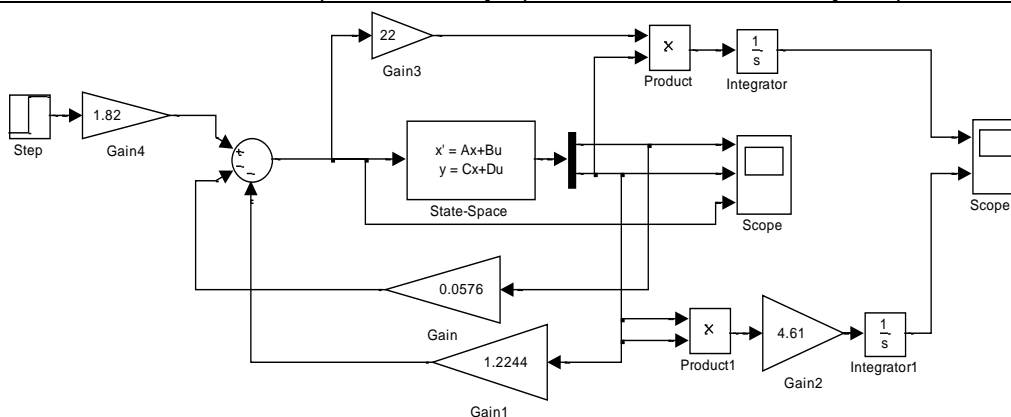


Рисунок 1 – Модель привода в приложении Simulink

В модели предусмотрен вывод на осциллограф Scope переменных состояния: угловой скорости  $\omega$  (она же является выходной переменной) и тока якорной обмотки  $I_a$ . Вид осциллограммы показан на рисунке 2. На осциллограф Scope1 выводятся кривые изменения

энергии, потребленной двигателем, и потерь энергии в обмотке якоря  $\Delta P$ . Вид осциллограммы показан на рисунке 3. Разность между двумя кривыми соответствует кинетической энергии вращения ротора.

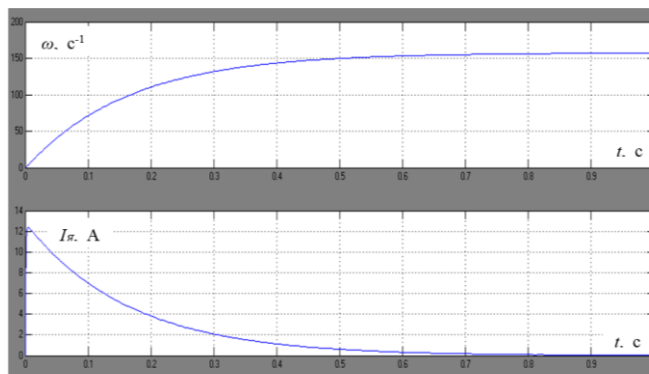


Рисунок 2 – Осциллограммы изменения угловой скорости и тока двигателя

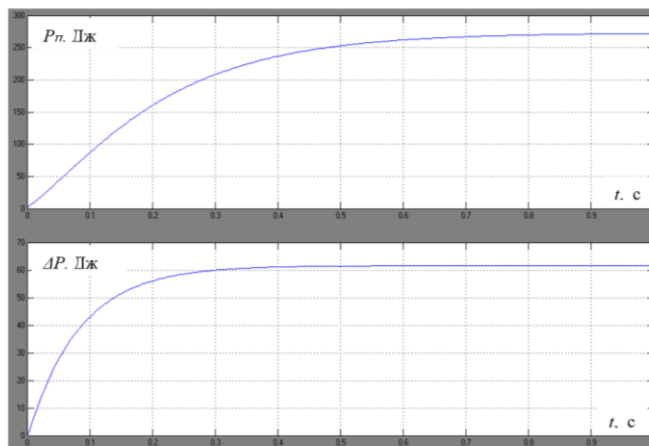


Рисунок 3 – Осциллограммы изменения потребленной энергии и потерь энергии

Процедура анализа реализуется следующим образом. При заданных значениях элементов матриц Q и R вычисляются значения  $k_1$  и  $k_2$  по (20), (21). Данные коэффициенты вводятся в модель и на основе получаемых в результате моделирования осциллограмм находятся показатели качества переходного процесса и потери энергии.

**Результаты исследования и обсуждение**

Результаты вычислений приведены в таблицах 1–4. Было установлено, что перегулирование имеет место только при больших значениях  $q_{11}/r$  и не превышает 2 %. Поэтому в качестве основного показателя качества переходного процесса принято время регулиро-

вания  $t_p$  (вычисляется при допустимом отклонении регулируемой переменной 2 %), а в качестве показателя энергоэффективности – потери энергии в приводе за время переходного процесса  $\Delta P$ . Данные показатели приводятся в таблицах 1–4.

Таблица 1 – Результаты моделирования при  $q_{11} = 1, q_{22} = 0$

r	1	2	5	10
$k_1$	0,9437	0,6515	0,3930	0,2635
$k_2$	0,2832	0,2162	0,1465	0,1058
$t_p, c$	0,014	0,017	0,023	0,028
$\Delta P, Дж$	1556	1278	972	790

**Таблица 2** – Результаты моделирования при  $q_{11} = 1, q_{22} = 1$

$r$	1	2	5	10
$k_1$	0,9437	0,6515	0,3930	0,2635
$k_2$	0,9053	0,6158	0,3621	0,2371
$t_p, c$	0,042	0,043	0,045	0,050
$\Delta P, Дж$	689	660	606	547

**Таблица 3** – Результаты моделирования при  $q_{11} = 1, r = 1$

$q_{22}$	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
$k_1$	0,9437	0,9437	0,9437	0,9437	0,9437	0,9437	0,9437
$k_2$	0,3760	0,4559	0,6523	0,9053	1,2881	2,0802	2,9919
$t_p, c$	0,018	0,022	0,031	0,042	0,058	0,091	0,128
$\Delta P, Дж$	1311	1153	891	689	513	335	240

**Таблица 4** – Результаты моделирования при  $r = 1$

$q_{11}$	0,1	0,01	0,01	0,01
$q_{22}$	1	1	1	2
$k_1$	0,2635	0,0576	0,0576	0,0576
$k_2$	0,8390	0,8181	0,5362	1,2244
$t_p, c$	0,132	0,36	0,26	0,51
$\Delta P, Дж$	233	86	118	61

Из полученных результатов следует, что увеличение значения матрицы R приводит к снижению потерь во всех случаях. При  $q_{22} = 1$  это снижение происходит менее интенсивно, как видно из таблиц 1, 2. Практически обратно-пропорционально величине потерь изменяется время регулирования. С ростом длительности переходного процесса уменьшается пиковое значение тока, что и обуславливает снижение потерь.

Следует отметить, что увеличение  $q_{22}$  приводит к дальнейшему снижению потерь и увеличению времени регулирования, как следует из таблицы 3. Учитывая, что коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ , а следовательно и величина потерь определяются отношениями  $q_{11}/r$  и  $q_{22}/r$ , целесообразно принять  $r = 1$ , а желаемое время регулирования и величину потерь задавать с помощью  $q_{11}$  и  $q_{22}$ . При этом следует иметь в виду, что к снижению потерь приводит уменьшение  $q_{11}$  и увеличение  $q_{22}$ . Это иллюстрируется таблицей 4.

Необходимо также отметить, что только при увеличении времени регулирования до значения 0,5 с, пиковое значение тока в период пуска снижается до величины примерно три номинальных значения. Данному случаю соответствуют результаты, приведенные в последнем столбце таблицы 4, и осциллограммы, показанные на рисунках 2, 3. Обычно этой величиной ограничивают ток в приводе. Соответственно, при меньшем времени регулирования привод будет работать с ограничением тока, т. е. с переходом в нелинейный режим. Моделирование показало, что при небольшом ограничении на коротком интервале это не отражается существенно на качестве переходного процесса. Однако нелинейный режим работы является нежелательным и всегда требует дополнительного исследования.

Таким образом, можно сделать вывод, что необоснованное завышение быстродействия привода (короткий переходный процесс) приводит к увеличению потерь и увеличивает вероятность перехода в нелинейный режим при ограничении тока. Следовательно, время регулирования следует принимать по возможности большим, насколько это допустимо по условиям работы привода.

Если говорить о коэффициентах  $k_1$  и  $k_2$ , посредством которых реализуется оптимальный закон управления, то из таблиц 1–4 видно, что снижение потерь и увеличение длительности переходного

процесса сопровождается уменьшением  $k_1$  и увеличением  $k_2$ . При этом одно и то же время регулирования можно получить при разных значениях коэффициентов, т. е. изменение  $k_1$  можно компенсировать соответствующим изменением  $k_2$ . Это позволяет при выборе коэффициентов учитывать удобство технической реализации и другие факторы.

### Заключение

В результате решения задачи оптимального управления для привода постоянного тока с регулируемой скоростью получены аналитические зависимости для расчета коэффициентов обратной связи по скорости и току двигателя. Это позволяет синтезировать оптимальный привод инженерным расчетом, не прибегая каждый раз к процедуре оптимизации. Однако результаты исследования демонстрируют, что это не гарантирует получения привода с минимальным энергопотреблением, поскольку все определяется выбором матриц Q и R, входящих в критерий оптимизации. Сформулированные рекомендации позволяют целенаправленно подойти к выбору данных матриц. В частности, показано, что наиболее экономичный привод можно получить при обеспечении предельно допустимой по условиям работы длительности переходного процесса за счет соответствующего уменьшения  $q_{11}$  и увеличение  $q_{22}$  при  $r = 1$ . Это уменьшает также вероятность работы привода с ограничением по току, т. е. в нелинейном режиме.

### Список цитированных источников

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник: в 5 т. – Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / 2-е изд. перераб. и доп.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – Под ред. П. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 744 с.
2. Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В.В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
3. Супрунчук, П. Д. Оптимальный электропривод постоянного тока / П. Д. Супрунчук, О. Н. Прокопеня, О. Г. Прожишко // Новые технологии и материалы, автоматизация производства : сборник статей / Брестский государственный технический университет – Брест : Издательство БрГТУ, 2021. – С. 20–25.

### References

1. Metody klassicheskoy i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya: uchebnik: v 5 t. – T. 4: Teoriya optimizatsii sistem avtomaticheskogo upravleniya / 2-e izd. pererab. i dop.– M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2004. – Pod red. P. A. Pupkova, N. D. Egupova. – 744 s.
2. Solodovnikov, V. V. Osnovy teorii i elementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya / V.V. Solodovnikov, V. N. Plotnikov, A. V. YAKovlev. – M.: Mashinostroenie, 1985. – 536 s.
3. Suprunchuk, P. D. Optimal'nyj elektroprivod postoyannogo toka / P. D. Suprunchuk, O. N. Prokopenya, O. G. Prozhizhko // Novye tekhnologii i materialy, avtomatizatsiya proizvodstva : sbornik statej / Brestskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet – Brest : Izdatel'stvo BrGTU, 2021. – S. 20–25.

Материал поступил 02.03.2023, одобрен 02.03.2023, принят к публикации 27.03.2023