

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ХВОСТОВЫХ ЧАСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НАГРУЗКИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

С. С. Дереченник¹, Н. Н. Мешечек²

¹ К. т. н., доцент, заведующий кафедрой электронно-вычислительных машин и систем,
УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: ssderechennik@gmail.com

² Аспирант, старший преподаватель кафедры электронно-вычислительных машин и систем
УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: meshechek88@gmail.com

Реферат

Полувероятностный метод расчета не обеспечивает адекватного проектирования конструкций с точки зрения обоснованного выбора «проектной» (расчетной) точки.

Предлагаемый путь преодоления названной проблемы – решение задачи анализа функции состояния не во всей области ее определения, а лишь для условия $X = R - E < 0$, что соответствует интервалу перекрытия вероятностных функций распределения нагрузки $g(E)$ и сопротивления $g(R)$. Рассматривается увеличенный фрагмент дифференциальных вероятностных распределений случайных величин нагрузки и сопротивления. Дополнительно рассматривается распределение условной вероятности $g(R | X < 0)$, которое соответствует условию отказа.

Положение максимума (моды) вероятностной функции распределения $g(R | X < 0)$ однозначно определяет наиболее вероятную комбинацию случайных величин E и R , таких, что $R < E$, и ее положение наилучшим образом соответствует смыслу расчетной точки конструкции.

Ключевые слова: нагрузка, сопротивление, условие отказа, приближение.

SOLVING THE PROBLEM OF ANALYZING THE STATE FUNCTION BASED ON THE APPROXIMATION OF THE TAIL PARTS OF THE DISTRIBUTIONS OF RANDOM VARIABLES LOADS AND RESISTANCES

S. S. Derechennik, N. N. Meshechek

Abstract

The semi-probabilistic calculation method does not provide an adequate design of structures in terms of a reasonable choice of a “design” (calculated) point.

The proposed way to overcome this problem is to solve the problem of analyzing the state function not in the entire domain of its definition, but only for the condition $X = R - E < 0$, which corresponds to the interval of overlapping of the probabilistic functions of load $g(E)$ and resistance distribution $g(R)$. An enlarged fragment of differential probability distributions of load and resistance random variables is considered. Additionally, the conditional probability distribution is considered $g(R | X < 0)$, which corresponds to the failure condition.

The position of the maximum (mode) of the probability distribution function $g(R | X < 0)$ uniquely determines the most probable combination of random variables E and R , such that $R < E$, and its position in the best way corresponds to the meaning of the calculated design point.

Keywords: load, resistance, failure condition, approximation.

Введение

При проектировании строительных конструкций очень важно установить соответствие расчетной модели действительной работе конструкций в эксплуатации и правильно учитывать изменчивость случайных факторов. Расчет начинается с анализа структурной схемы сооружения и распределений его сопротивления R и внешних нагрузок E . Отсутствие отказов характеризуется тем, что усилия от нагрузок E не превышают несущую способность R .

В силу случайной природы несущей способности и нагрузок условие не может быть выполнено абсолютно точно. Оно соблюдается с некоторой вероятностью, достаточно близкой к единице, в течение срока службы сооружения. По мере развития теории надежности предлагались различные методы расчета надежности строительных конструкций.

Решение задачи анализа функции состояния для условия превышения нагрузкой несущей способности

Большинство исследователей отмечают, что случайные величины E и R , строго говоря, не имеют нормального (гауссова) распределения. Действительно, трудно ожидать, например, что сумма E нормально распределенной нагрузки G со сравнительно небольшой вариацией и переменной нагрузки Q_{50} того же порядка величины, но с распределением Гумбеля и заметно большей вариацией (коэффициент вариации 0,35), будет иметь нормальный (или хотя бы достаточно близкий к нему) закон распределения. Что же касается случайной величины R прочности конструкции, то, во-первых, она формируется не только суммированием, но также и перемножением базовых переменных (размеров сечения колонны b и h с прочностями f_c и f_t бетона и арматуры). Во-вторых, прочности бетона и арматуры, в общем случае, могут иметь различные

функции распределения (например, нормальное и логнормальное). В результате и прочность конструкции также не будет иметь нормального вероятностного распределения.

При этом следует отметить, что полувероятностный метод расчета изначально основывается на предположении о нормальном (либо близком к нему) вероятностном распределении нагрузки, сопротивления и функции состояния конструкции. Поэтому запасы по несущей способности конструкции при расчете полувероятностным методом и при вероятностно-статистическом моделировании являются неизбежным следствием существенного отличия распределений $g(E)$ и $g(R)$, а следовательно, и $g(X)$, от нормального.

Отклонение случайных величин от нормального распределения порождает необходимость введения некоторых калиброванных коэффициентов ($\gamma_G, \gamma_Q, \gamma_S$ и γ_R), гарантирующих за счет создания весьма ощутимых конструктивных запасов достижение целевой надежности (запас по вероятности отказа при этом, как указано выше, также весьма существенен). С другой стороны, несмотря на такие конструктивные запасы, фактически достигаемый индекс надежности ($\beta = 3,87$) почти соответствует заданному значению ($\beta = 3,8$), однако задаваемое значение индекса надежности само по себе явно завышено (для фактического распределения функции состояния) [1].

В итоге полувероятностный метод расчета (метод частных коэффициентов) не обеспечивает адекватного проектирования конструкций с точки зрения обоснованного выбора «проектной» (расчетной) точки. Так можно указать несколько значений положения расчетной точки: по нагрузке и по сопротивлению. Иными словами, ее положение фактически является неопределенным.

Предлагаемый путь преодоления названных проблем – решение задачи анализа функции состояния не во всей области ее определения, а лишь для условия $X = R - E < 0$, что соответствует интервалу перекрытия функций $g(E)$ и $g(R)$. На рисунке 1 приведен увеличенный фрагмент дифференциальных вероятностных распределений случайных величин нагрузки и сопротивления, а также кумулянта $C_E = 1 - G(E)$ интегральной функции вероятности нагрузки, соответствующие рассматриваемому примеру. Дополнительно на этом рисунке представлено распределение условной вероятности $g(R | X < 0)$, которое соответствует условию отказа (таким комбинациям нагрузки и сопротивления, что $E > R$). Поскольку данное распределение является парциальным (частью) от распределения двух случайных величин E и R (т. е. всех возможных комбинаций нагрузки и сопротивления), оно не является нормированным, а для наглядности оно представлено в существенно увеличенном масштабе в другой (правой) шкале ординат.

Обратим внимание на положение максимума (моды) вероятностной функции $g(R | X < 0)$, которое составляет примерно 4,5...4,6 МН.

Поскольку мода этого распределения определяет наиболее вероятную комбинацию случайных величин E и R , таких, что $E > R$, ее положение наилучшим образом соответствует смыслу «проектной» (расчетной) точки конструкции.

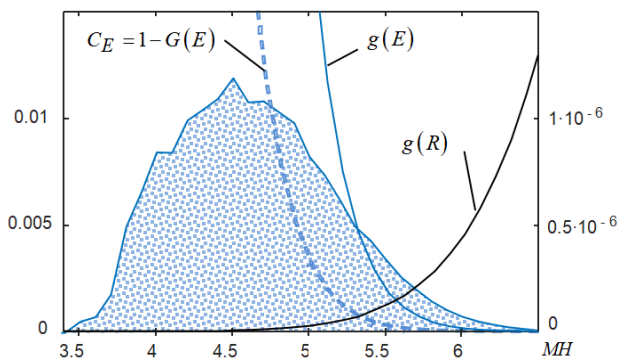


Рисунок 1 — Пример вероятностных функций распределения нагрузки и сопротивления (в области их перекрытия), а также распределение вероятности, соответствующее условию отказа конструкции

Как известно, вероятность отказа конструкции для некоторого значения сопротивления в узком интервале $[r, r + dr]$ составляет $p_f(r) = (1 - G(r)) \cdot f_R(r) = C_E(r) \cdot f_R(r)$, (1) а полная вероятность отказа:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} p_f(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} C_E(r) \cdot f_R(r) dr. \quad (2)$$

Заметим, что выражение (1) соответствует вычислению условной вероятности $g(R = r | X < 0)$ как произведения кумулянты $C_E(E)$ и дифференциальной функции $g(R)$. Фактический вид функции $g(R | X < 0)$, которая показана на рисунке 1, позволяет ограничить пределы интегрирования (в области перекрытия перемножаемых функций) некоторыми значениями E_{max} и R_{min} , такими, что $C_E(E > E_{max})$ и $g(R < R_{min})$ будут пренебрежимо малы (например, менее 10^{-4} , тогда $p_f < 10^{-8}$). Тогда приближенное значение полной вероятности отказа определяем как

$$P_f = \int_{R_{min}}^{E_{max}} p_f(r) dr = \int_{R_{min}}^{E_{max}} C_E(r) \cdot f_R(r) dr. \quad (3)$$

С другой стороны, полная вероятность отказа может быть определена как интеграл от произведения дифференциальной функции $g(E)$ и интегральной функции $G(r)$:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} g_E(r) \cdot G_R(r) dr. \quad (4)$$

Пусть нагрузка на конструкцию (по крайней мере, в области высоких ее значений, т. е. правого хвоста распределения) имеет распределение Гумбеля с интегральной функцией [2]:

$$G_E(r) = \exp\{-\exp(a - b \cdot r)\}. \quad (5)$$

что соответствует линейной зависимости в двойной логарифмической (применительно к вероятности G) шкале, имеющей вид: $a - b \cdot r = -\ln(-\ln G)$, при этом знак «минус» при коэффициенте $b > 0$ означает уменьшение вероятности отказа при увеличении сопротивления. Определим кумулянту распределения нагрузки:

$$C_E(r) = 1 - G_E(r) = 1 - \exp\{-\exp(a - b \cdot r)\}. \quad (6)$$

В области малых значений C_E (на правом хвосте вероятностного распределения нагрузки), а значит, малого показателя степени в правой части (6), воспользуемся известным математическим приближением $e^y \approx 1 + y$, тогда:

$$G_E^-(r) = 1 - \exp(a - b \cdot r), C_E^-(r) = \exp(a - b \cdot r). \quad (7)$$

Приближение дифференциальной функции распределения:

$$g_E^-(r) = dG_E^-(r) / dr = b \cdot \exp(a - b \cdot r). \quad (8)$$

Пусть также имеется некоторое распределение случайной величины сопротивления, например, распределение Вейбулла (в т. н. «зеркальном» варианте, т. е. для рассмотрения левого хвоста) [2]:

$$G_R(r) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{r - \xi}{\lambda}\right)^\beta\right\}, \quad (9)$$

где ξ и λ – соответственно параметры смещения и масштаба случайной величины ($\xi, \lambda > 0, \beta > 0$).

В области малых значений G_R (на левом хвосте вероятностного распределения сопротивления) воспользуемся аналогичным математическим приближением $\ln(1 + y) \approx y$, тогда

$$\ln(1 - G_R(r)) = -\left(\frac{r - \xi}{\lambda}\right)^\beta = -G_R^-(r). \quad (10)$$

Окончательно приближение интегральной функции распределения сопротивления: $G_R^-(r) = \left(\frac{r - \xi}{\lambda}\right)^\beta$.

Путем дифференцирования выражения (10) найдем приближенное значение функции плотности вероятности для случайной величины сопротивления:

$$g_R^-(r) = \frac{\beta}{\lambda} \cdot \left(\frac{r - \xi}{\lambda}\right)^{\beta-1}. \quad (11)$$

Подставляя (7) и (11) в выражение (1), найдем приближенное значение вероятности отказа конструкции для узкого интервала $[r, r + dr]$:

$$p_f^-(r) = C_E^-(r) \cdot f_R^-(r) = e^{a-b \cdot r} \cdot \frac{\beta}{\lambda^\beta} \cdot (r - \xi)^{\beta-1}. \quad (12)$$

Для нахождения моды вероятностной функции $g(R | X < 0)$ необходимо вычислить абсциссу локального экстремума функции (12) либо некоторой другой функции, монотонно связанной с ней. В данном случае удобно вычислять положение экстремума функции

$\ln p_f^-(r)$:

$$\frac{d[\ln p_f^-(r)]}{dr} = [a - b \cdot r + \ln \beta - \beta \ln \lambda + (\beta - 1) \ln(r - \xi)]'_r = -b + \frac{\beta - 1}{r - \xi} = 0, \quad (13)$$

откуда

$$r^* = \xi + (\beta - 1) / b. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$p_f^-(r) = g_{E^-}(r) \cdot G_R^-(r) = b \cdot e^{a-b \cdot r} \cdot \lambda^{-\beta} (r - \xi)^\beta. \quad (15)$$

Экстремум:

$$\frac{d[\ln p_f^-(r)]}{dr} = [\ln b + a - b \cdot r - \beta \ln \lambda + \beta \ln(r - \xi)]'_r = -b + \frac{\beta}{r - \xi} = 0; \quad (16)$$

$$r^{**} = \xi + \beta / b, \Delta r^* = r^{**} - r^* = 1 / b = const.$$

Таким образом, мода распределения вероятностной функции $g(R | X < 0)$, соответствующая наиболее вероятным комбинациям параметров по условию отказа, однозначно определяется параметрами b , ξ и β линейных (в соответствующих логарифмических координатах) приближения (7) правого хвоста интегрального распределения нагрузки и приближения (11) левого хвоста плотности распределения сопротивления конструкции. Найденную величину r^* предлагается считать проектной (расчетной) точкой конструкции.

Обратим внимание, что в выражении (13) отсутствуют параметры a и λ принятых приближений. Однако здесь нет каких-либо противоречий.

Во-первых, как было показано ранее [3] при анализе характеристической прочности бетона в ее взаимосвязи со средней надежностью конструкции, значение параметра a влияет только лишь на абсолютную величину вероятности отказа, на значение же характеристической прочности бетона, обеспечивающей целевую надежность конструкции, влияет только лишь величина коэффициента, аналогичного коэффициенту b .

Во-вторых, параметр масштаба λ , определяющий единицу измерения сопротивления (для приведения к безразмерному показателю степени в (7) – например, 1 МН, 50 кН, или любая иная величина), неявно присутствует в параметре сдвига ξ , измеряемом в тех же единицах [4].

Выполним приближение хвостовых частей распределений на рассматриваемом примере. Для этого по результатам численного моделирования (генерации наборов данных) найдем положение нескольких квантилей распределений $g(E)$ и $g(R)$.

Так, например, квантили уровней 0.90, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995 и 0.999 функции $g(E)$ (соответственно, значения 0.10, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.001 кумулянты $C(E) = 1 - g(E)$) составляют 4.19, 4.40, 4.64, 4.81, 4.97 и 5.31 МН. Полученный набор данных аппроксимируется линейной функцией $\ln C_E^-(r) = 15.063 - 4.1102 \cdot r$ (т. е. $a = 15.063$ и $b = 4.1102 \text{ МН}^{-1}$) с достоверностью $R^2 = 0.9951$.

Если взять только квантили уровней 0.1, 0.05, 0.02 и 0.01, то $a = 13.326$ и $b = 3.7207 \text{ МН}^{-1}$.

Для распределения $g(R)$ квантили уровней 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005 и 0.0001 составляют соответственно: 7.66, 7.11, 6.76, 6.45, 5.83, 5.59 и 5.11 МН.

Из выражения (10) находим $r = \xi + \lambda \cdot G_R^-(r)^{1/\beta}$. Примем величину смещения равной минимальному значению случайной величины сопротивления конструкции $\xi = \min E = 3.0 \text{ МН}$, после чего выполним аппроксимацию данных степенной функцией

$r = 3.0 + 6.746 \cdot G_R^-(r)^{0.126}$ (т. е. $\lambda = 6.7457 \text{ МН}$ и $\beta = 7.9365$) с достоверностью $R^2 = 0.9998$.

Если взять только квантили уровней 0.05, 0.02, 0.01, 0.005 и 0.001 – то $\lambda = 6.7491 \text{ МН}$ и $\beta = 7.9051$.

Согласно (14) мода условного распределения функции $g(R | X < 0)$ составляет

$$r^* = 3.0 + (7.9365 - 1) / 4.1102 = 4.688 \text{ МН}$$

и практически соответствует фактическому значению, представленному на рисунке 1.

Значение функции $g(R | X < 0)$ в точке моды вычисляем:

$$\max p_f^- = p_f^-(r = r^*) = 1/1765 \cdot 10^{-6}$$

что также с приемлемой точностью соответствует рисунку 1.

Для нахождения полной вероятности отказа по (2) необходимо интегрировать выражение (12), однако точное вычисление такого интеграла сопряжено с определенными трудностями (сводится к рекуррентному интегрированию по частям). Тем не менее, можно вычислить величину P_f в первом приближении, используя, например, формулу Симпсона для определенного (на отрезке $[R_{\min}, E_{\max}]$) интеграла:

$$P_f = \frac{E_{\max} - R_{\min}}{3} \int_{R_{\min}}^{E_{\max}} p_f^-(r) dr, \quad (17)$$

выбирая при этом E_{\max} и R_{\min} так, чтобы $p_f^-(R_{\min})$ и $p_f^-(E_{\max})$ были пренебрежимо малыми величинами по сравнению со значением $\max p_f^-$. Обратим внимание, что мода распределения

$g(R | X < 0)$ расположена примерно посередине интервала $[R_{\min}, E_{\max}]$, тогда

$$P_f = \frac{2}{3} (E_{\max} - R_{\min}) \cdot \max p_f^- \quad (18)$$

Задаваясь (по рисунку 1, на уровне $p_f^- \geq 10^{-7}$) интервалом $[R_{\min}, E_{\max}] = [3.6 \text{ МН}, 5.9 \text{ МН}]$, получаем:

$$P_f = \frac{2}{3} (5.9 - 3.6) \cdot 1.28 \cdot 10^{-6} = 1.96 \cdot 10^{-6},$$

а именно: совпадающую с результатами численного моделирования величину полной вероятности отказа анализируемой конструкции.

Значения E_{\max} и R_{\min} можно вычислить из трансцендентного уравнения, вытекающего из (12), вида

$p_f^-(R_{\min}) = p_f^-(E_{\max}) = 0.1 \max p_f^- = 1.18 \cdot 10^{-7}$, путем его решения относительно r .

В рассматриваемом примере такое уравнение будет иметь два решения: $r_1 = R_{\min} = 3.66 \text{ МН}$ и $r_2 = E_{\max} = 6.46 \text{ МН}$.

При этом $P_f = 2.20 \cdot 10^{-6}$, что на 12.25 % превышает (т. е. отклоняется в сторону запаса надежности) значение, полученное в результате численного моделирования.

Заключение

В результате решения задачи анализа функции состояния для условия $X = R - E < 0$ что соответствует приближению хвостовых частей распределений случайных величин нагрузки и сопротивления, получили значение вероятности отказа конструкции, почти совпадающее со значением, полученным вероятно-статистическим моделированием [1]. Можно сделать вывод, что предложенный метод решения задачи также дает верный результат.

Список цитированных источников

1. Мешечек, Н. Н. Анализ вероятности отказа конструкции на основе приближения хвостовых частей распределений случайных величин нагрузки и сопротивления / Н. Н. Мешечек, С. С. Дереченник // Цифровая среда: технологии и перспективы: сборник материалов Международной научно-практической конференции; Брест, 31 октября 2022 года / Редкол. : Н. Н. Шалобыта [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2022. – С. 57–60.
2. Шпете, Г. Надежность несущих строительных конструкций / Г. Шпете; перевод с нем. О. О. Андреева. – М. : Стройиздат, 1994. – 288 с.
3. Derechennik, S. S. Adaptive Estimation of the In Situ Characteristic Concrete Strength / S. S. Derechennik, V. V. Tur. // Solid State Phenomena. – 2019. Vol. 292. – P. 257–263.
4. Tur, V. V. Non-parametric evaluation of the characteristic in-situ concrete compressive strength / V. V. Tur, S. S. Derechennik // Journal of Building Engineering. – 2019. – Vol. 27. – P. 1–11.

References

1. Meshechek, N. N. Analiz veroyatnosti otkaaza konstrukcii na osnove priblizheniya hvostovykh chastej raspredelenij sluchajnykh velichin nagruzki i soprotivleniya / N. N. Meshechek, S. S. Derechennik // Cifrovaya sreda: tekhnologii i perspektivy: sbornik materialov Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii; Brest, 31 oktyabrya 2022 goda / Redkol. : N. N. Shalobyta [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2022. – С. 57–60.
2. Shpete, G. Nadezhnost' nesushchih stroitel'nykh konstrukcij / G. Shpete; perevod s nem. O. O. Andreeva. – M. : Strojizdat, 1994. – 288 s.
3. Derechennik, S. S. Adaptive Estimation of the In Situ Characteristic Concrete Strength / S. S. Derechennik, V. V. Tur. // Solid State Phenomena. – 2019. Vol. 292. – P. 257–263.
4. Tur, V. V. Non-parametric evaluation of the characteristic in-situ concrete compressive strength / V. V. Tur, S. S. Derechennik // Journal of Building Engineering. – 2019. – Vol. 27. – P. 1–11.

Материал поступил 22.01.2023, одобрен 21.02.2023, принят к публикации 21.02.2023