

УДК 624.07:624.046

ДОПУЩЕНИЯ МЕТОДА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ОШИБКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ

А. В. Тур

К. т. н., доцент, заведующий кафедрой архитектуры, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: aturphd@gmail.com

Реферат

Моделирование поведения конструктивной системы после внезапного удаления колонны рекомендуют выполнять, опираясь, как правило, на подходы нелинейной динамики для конкретной истории нагружения. Альтернативно, при данном сценарии угрозы (удалении колонны) доступен упрощенный метод анализа поврежденной конструктивной системы, определяемый как метод энергетического баланса. В общем случае метод энергетического баланса (ЕВМ-метод) включает нелинейный статический анализ с пошаговым приложением контролируемого перемещения в узле с удаленным элементом и упрощенную процедуру определения динамической реакции системы на основе её энергетического баланса, что принято рассматривать как компромисс между точностью и сложностью. Метод энергетического баланса позволяет получить значение максимального динамического перемещения контрольной точки рассматриваемой конструктивной системы при установленном уровне нагрузки. Этот параметр является достаточным для оценивания живучести конструктивной системы, т. к. основная идея состоит в том, чтобы избежать разрушения и, следовательно, получить максимальное значение допустимого отклика. Для реальной конструкции с бесконечным числом степеней свободы упрощенный метод даёт приблизительный результат, который, однако адекватно отражает результаты, полученные «строгими» методами динамического нелинейного анализа с учётом истории нагружения. Неявная ошибка, содержащаяся в результатах при применении метода энергетического баланса, возникает главным образом из-за ряда упрощений и допущений, которые подробно рассмотрены в настоящей статье.

Ключевые слова: метод энергетического баланса, живучесть, ошибка моделирования.

ASSUMPTIONS OF THE ENERGY BALANCE METHOD AND RELATED ERRORS IN DETERMINING THE DYNAMIC RESPONSES OF STRUCTURAL SYSTEMS

A. V. Tur

Abstract

Modeling the behavior of a structural system following the sudden removal of a column is typically recommended based on non-linear dynamics (NLD) approaches for a specific loading history. Alternatively, under this specific hazard scenario (column removal), a simplified method for analyzing the damaged structural system is available, defined as the energy balance method. In the general case, the energy balance method (EBM) involves a non-linear static analysis (NLS) with incremental step-by-step application of controlled displacement at the node of the removed element, along with a simplified procedure for determining the dynamic response of the system based on its energy balance; this is widely considered a compromise between accuracy and complexity. The energy balance method allows for obtaining the maximum dynamic displacement value of the control point within the structural system under consideration at a specified load level. This parameter is sufficient for assessing the robustness of the structural system, since the core concept is to prevent collapse and, consequently, to determine the maximum value of the allowable response. For a real structure with an infinite number of degrees of freedom, the simplified method yields an approximate result, which, however, adequately reflects the outcomes obtained via 'rigorous' methods of dynamic non-linear analysis considering the loading history. The implicit error contained in the results when applying the energy balance method arises primarily due to a number of simplifications and assumptions, which are examined in detail in this paper.

Keywords: energy balance method, reliability, modelling error.

Введение

Численный анализ отклика конструктивной системы здания, основанный на имитационном моделировании его цифрового двойника, подвергнутого вынужденному внезапному удалению вертикального несущего элемента, является довольно сложной задачей с точки зрения совместного описания динамических эффектов, физической и геометрической нелинейности, вызванных ожидаемыми большими деформациями и перемещениями, когда перестаёт выполняться гипотеза плоских сечений, и в работу включаются мембранные эффекты.

Моделирование поведения конструктивной системы после внезапного удаления колонны рекомендуют выполнять, опираясь, как правило, на подходы нелинейной динамики для конкретной истории нагружения. Это требует привлечения высококвалифицированных специалистов с опытом выполнения расчётов в области нелинейной динамики строительных сооружений. Поэтому не удивительно, что конструкторы предпочитают выполнять нелинейные квазидинамические расчёты, пользуясь упрощенным подходом к учёту динамических эффектов для традиционного проектирования и оценивания эксплуатируемых строительных сооружений. Однако подходы, основанные на статических расчётах с применением повышающих

динамических коэффициентов, не вполне адекватно воспроизводят фактическое поведение конструкции, особенно в неупругой области её работы, как было показано в работах [1–3]. Альтернативно, при данном сценарии угрозы (удалении колонны) применяют упрощенный метод анализа поврежденной конструктивной системы, определяемый как метод энергетического баланса (англ. *EBM – Energy Balance Method*). В общем случае метод энергетического баланса (*EBM-метод*) включает нелинейный статический анализ с пошаговым приложением контролируемого перемещения в узле с удалённым элементом и упрощенную процедуру определения динамической реакции системы на основе её энергетического баланса, что принято рассматривать как *компромисс между точностью и сложностью*.

Подход, основанный на методе энергетического баланса, обеспечивает в общем случае более точное оценивание живучести конструктивной системы по сравнению с подходом, опирающимся на линейно-упругом анализе с повышающими динамическими коэффициентами, так как он учитывает при выполнении анализа способность конструктивной системы к поглощению (диссипации) энергии, пластическую деформативность и избыточность [4].

Метод энергетического баланса позволяет получить значение максимального динамического перемещения контрольной точки рассматриваемой конструктивной системы при установленном уровне нагрузки. Этот параметр является достаточным для оценивания живучести конструктивной системы, т. к. основная идея состоит в том, чтобы избежать разрушения и, следовательно, получить максимальное значение допустимого отклика. Основы метода энергетического баланса подробно рассмотрены в работах [1–2].

В рамках метода энергетического баланса считается, что после внезапного удаления колонны общая энергия остаётся постоянной на протяжении всего динамического деформирования конструкции (рисунок 1а), при условии, что энергия, рассеиваемая другими источниками, например, тепловая энергия, не учитывается [2, 3, 5]. При балансировке энергии учитывают три составляющих: кинетическую энергию (KE), возникающую при движении поврежденной части системы (подсистемы) после удаления опоры, энергию деформации (SE), возникающую при деформировании конструкции и высвобожденную потенциальную энергию (PE) при движении конструкции вниз. Высвободившаяся потенциальная энергия, возникающая в результате дей-

ствия несбалансированных гравитационных нагрузок на оставшуюся часть конструкции, приводит к динамическому движению и увеличению кинетической энергии. Напротив, упругая и неупругая энергия деформации, накопленная деформированной конструкцией, рассеивает кинетическую энергию, противодействуя и сопротивляясь движению.

Метод энергетического баланса опирается на допущение о том, что до внезапного удаления колонны, как потенциальная, так и кинетическая энергии равняются нулю. Непосредственно после мгновенного удаления колонны потенциальная энергия гравитационной нагрузки внезапно высвобождается и условия равновесия нарушаются. Если конструкция способна перераспределять несбалансированные/неуравновешенные нагрузки, потенциальная энергия может поглощаться энергией деформации. Следовательно, кинетическая энергия может достигать нулевого значения (т. е. $KE = PE - SE = 0$).

В момент, когда кинетическая энергия становится равной нулю, работа гравитационной нагрузки равняется поглощенной энергии деформации и нет более источника энергии, способной продолжить процесс деформирования. При этом достигается максимальная динамическая реакция.

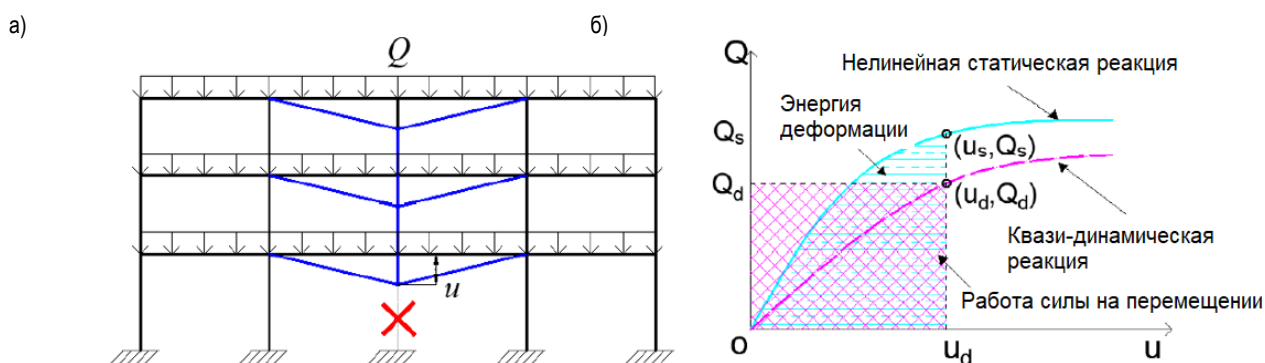


Рисунок 1 – Схема здания с удалённой колонной (а) и зависимость «нагрузка-перемещение» (б), описывающая нелинейную статическую и динамическую реакцию в методе энергетического баланса

Энергию, накопленную в деформированной системе, можно рассчитать с помощью нелинейного статического анализа (NLS). В этом случае энергия деформации представляет собой заштрихованную область под кривой статического сопротивления вплоть до перемещения u_c (рисунок 1б). С другой стороны, высвободившаяся потенциальная энергия, образованная несбалансированными нагрузками после внезапного удаления колонны, равна заштрихованной прямоугольной области для постоянного уровня нагрузки Q_d . Если предположить, что кинетическая энергия равна нулю (на уровне перемещения, $u_c = u_d$), то потенциальная энергия равна энергии деформации ($PE = SE$). Следует отметить, что рассматривается состояние, при котором обрушения не происходит, а конструкция занимает новое положение равновесия.

Графически, работа внешней гравитационной нагрузки представляет собой площадь прямоугольника под горизонтальной линией, соответствующей уровню нагружения, тогда как накопленная энергия деформации представляет собой площадь фигуры, заключенной под кривой, описывающей нелинейную статическую реакцию конструктивной системы. Максимальная реакция для уровня нагрузки Q_d , следовательно, соответствует перемещению u_d , при котором эти площади равны, как показано на рисунке 1б. Переходя последовательно к монотонно возрастающим уровням нагружения, может быть получена кривая динамической несущей способности (квазидинамического сопротивления) Q_d , основываясь только на кривой статического отклика $Q_{NL,d}$.

Математически точки кривой динамического отклика могут быть рассчитаны путём деления накопленной энергии деформации на соответствующее перемещение: $Q_d(u_d) = \frac{1}{u_d} \int_0^{u_d} Q_{NL,d} du$, где Q_d , $Q_{NL,d}$, u , u_d – соответствуют кривой динамической несущей способности, статической несущей способности, абсолютному динамическому перемещению и максимальной динамической реакции

системы, подвергнутой внезапному удалению колонны при различных уровнях нагружения.

Таким образом максимальная обобщенная динамическая реакция конструктивной системы, подвергнутой внезапному удалению колонны при различных уровнях нагружения, может быть получена из кривой нелинейного статического отклика, без выполнения нелинейного динамического анализа.

При этом следует иметь в виду, что метод энергетического баланса даёт довольно точный результат только для моделей конструктивных систем, которые имеют одну степень динамической свободы (англ. SDOF – Single Degree of Freedom) для полной динамической реакции. Для реальной конструкции с бесконечным числом степеней свободы, упрощенный метод даёт приближительный результат, который, однако, адекватно отражает результаты, полученные «строгими» методами нелинейного динамического анализа с учётом истории нагружения. Небольшая ошибка, содержащаяся в результатах при применении метода энергетического баланса, возникает, главным образом, из-за ряда упрощений и допущений, которые будут подробно рассмотрены ниже.

Чтобы оценить погрешности и неопределенности метода энергетического баланса (ЕВМ), было выполнено комплексное исследование основных параметров, оказывающих влияние на результат вычисления квазидинамического отклика.

В настоящей статье для каждого отдельного допущения о поведении различных простейших конструктивных систем были исследованы ошибки в оценке абсолютных значений максимальных динамических перемещений $w_{d,EBM}$, полученные с помощью рассматриваемого метода энергетического баланса (ЕВМ) и прямого нелинейного пошагового динамического анализа (IDA). Эти ошибки выражены в относительных величинах разницы между результатами, полученными с помощью метода энергетического баланса (ЕВМ) $w_{d,EBM}$, и условно «точными» результатами $w_{d,e,IDA}$, которые были получены

наиболее строгим методом анализа, рассмотренным для каждого отдельного предположения/допущения:

$$err = 100 \left(\frac{W_{d,EBM} - W_{d,IDA}}{W_{IDA}} \right), [\%].$$

1 Основные допущения метода энергетического баланса (EBM)

Метод энергетического баланса (EBM), применяемый для учёта динамических эффектов при оценке живучести поврежденной конструктивной системы методом альтернативных путей передачи нагрузки, основан на допущениях и упрощениях, которые приводят к приближенным решениям и сказываются на точности получаемых результатов (как было отмечено ранее «компромисс между точностью и сложностью»).

При выполнении параметрического анализа рассматривали ошибки, связанные со следующими основными допущениями метода энергетического баланса (EBM):

- для получения квазидинамической реакции/отклика допускается ступенчатое/пошаговое приложение гравитационной нагрузки, моделирующее внезапное удаление колонны (ранее было показано, что квазидинамическая реакция рассматривается здесь как последовательность статических состояний); при этом не рассматривается исходное деформированное состояние конструкции до удаления опоры;

- поврежденная подсистема (ячейка) после удаления колонны ведёт себя как система с одной степенью динамической свободы (SDOF) [1–3], т. е. реакция контролируется одним режимом деформации (формой колебаний), который остаётся постоянным во время динамической реакции. Таким образом, предполагают, что каждая точка в системе достигает своего максимального перемещения в одно и то же время. Однако в реальной конструкции этого никогда не происходит, поскольку существующее бесконечное количество режимов деформации (форм колебаний) достигает максимального перемещения в разные моменты времени. Следовательно, накопленная энергия деформации, подсчитываемая методом энергетического баланса (EBM), фактически является завышенной *a-priori*, как и расчётные значения максимальных квазидинамических прогибов, тогда как динамическая несущая способность, соответственно, занижена [3];

- в методе энергетического баланса (EBM) эффект демпфирования не рассматривают в явном виде. Вся энергия, поступающая в систему от нагрузок, преобразуется в чистую энергию деформации. При расчете методом энергетического баланса (EBM) не учитывают энергию, рассеиваемую демпфированием или другими механизмами. Следовательно, можно ожидать, что значение максимального динамического отклика будет завышено. Более того, все еще остается не только актуальным, но и спорным вопрос о том, как моделировать механизм демпфирования для сценария внезапного удаления колонны [5–7], например, рассматривая вязкое демпфирование или кулоновское демпфирование [3]. Например, исследования [8, 9] выявили недостатки, связанные с использованием демпфирования по закону Рэлея (на основе начальной жёсткости), при кото-

ром начальная жёсткость может создавать нежелательные искусственные вязкостные силы. Это связано с тем, что коэффициент жёсткости, используемый при демпфировании по закону Рэлея, также должен соответствующим образом обновляться, когда система реагирует на неупругую стадию деформирования [7];

- не учитывается влияние скорости деформации на свойства материалов, т. е., неявно считается, что способность конструктивной системы накапливать энергию деформации на заданном перемещении одинакова при статическом и динамическом нагружении.

Однако способность системы накапливать энергию деформации при заданном перемещении различается в условиях статического и динамического нагружения [10]. Метод энергетического баланса (EBM) не может учесть эти различия. Однако, как показали результаты экспериментальных исследований [11] и результаты, полученные на имитационных моделях [3, 5], влияние скорости деформирования невелико, поскольку максимальные скорости деформирования при внезапном удалении колонны возникают только на небольшом локальном участке и действуют в течение довольно короткого промежутка времени.

2 Параметрические исследования

2.1 Испытания двухпролётного фрагмента рамы, использованного в качестве аналога / прототипа при параметрических исследованиях

Для проведения параметрического исследования, направленного на выявление качественного влияния принятых допущений и упрощений на точность оценивания параметров живучести при совместном применении метода альтернативных путей передачи нагрузки и метода энергетического баланса (для учёта динамических эффектов) использовали результаты испытания двухпролётного балочного фрагмента монолитной рамы, детально описанные в [12]. Данные испытания были выбраны в связи с тем, что нагружение фрагмента выполняли при внезапном удалении средней опоры (время приложения нагрузки составляло 0,008 с) и различных уровнях нагружения. При этом, до удаления центральной опоры, в центре пролётов и на опоре были приложены сосредоточенные силы, создаваемые тарированными грузами. В процессе испытания фиксировали колебания (вертикальные динамические перемещения) и усилия в балках при различных уровнях нагружения. Следует отметить, что это практически единичное исследование, в рамках которого испытания выполняли при разных уровнях нагружения, что дало возможность с допустимой точностью восстановить точки кривой динамической несущей способности для данного фрагмента и сравнить их как с результатами прямого нелинейного динамического анализа, так и квазидинамической реакцией фрагмента, полученной с помощью метода энергетического баланса.

Конструктивное решение опытного фрагмента с геометрическими размерами основных элементов показано на рисунке 2. Схемы армирования опорных и пролётных сечений, прочностные характеристики арматурной стали и бетона, которые были применены для изготовления опытных образцов приведены в работе [12, с. 22].

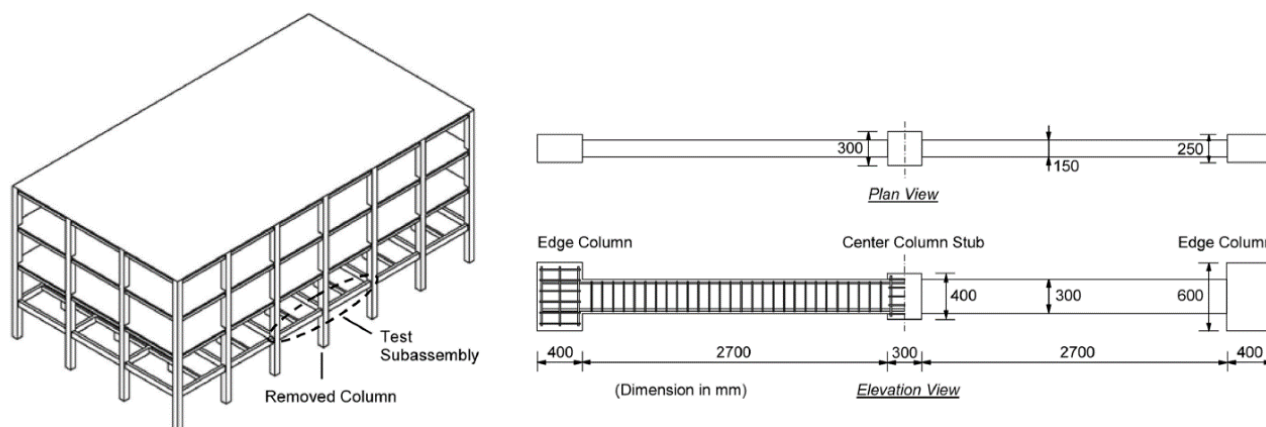


Рисунок 2 – Конструктивная система-прототип и опытный фрагмент [12, с. 21]

Схема нагружения опытного образца и соответствующая схема испытаний показаны на рисунке 3.

Параметрическое исследование включало следующие этапы:

- выполняли прямой нелинейный динамический анализ используя комплекс SAP2000 для различных уровней нагружения, принятых при испытаниях опытных образцов. Для увеличения количества точек, необходимых при построении кривой динамического отклика, использовали дополнительно промежуточные уровни нагружения. Для разных этапов нагружения использовали разные значения коэффициентов демпфирования, полученные из опыта (от 0 % до 5 % для стадии упругой работы и не менее 10 % – для нагружений близких к предельным) [12];
- по полученным значениям максимальных динамических перемещений для заданного уровня нагрузки выполняли построение кривой динамического отклика, на которую затем наносили точки,

полученные при проведении опытного нагружения. Анализировали отклонения результатов, полученных прямым динамическим анализом от результатов, полученных в динамических испытаниях при различных уровнях нагружения;

- выполняли прямой нелинейный статический пошаговый (ступенчатый) анализ повреждённой конструктивной системы с контролем вертикального перемещения в центральном узле (месте удаления вертикальной опоры). Полученную кривую статического отклика перестраивали в квазидинамическую кривую по правилам метода энергетического баланса [2, 3, 5]. Вычисляли погрешности метода энергетического баланса по сравнению с прямым нелинейным динамическим расчётом.

Расчётная схема (цифровой двойник) двухпролётного фрагмента с местами врезки изгибных и осевых пластических шарниров показана на рисунке 4.

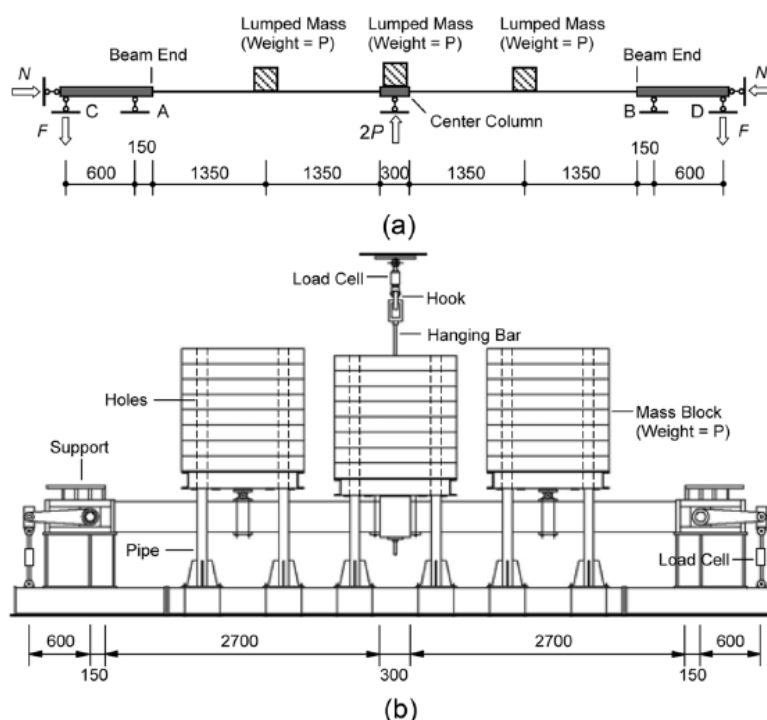


Рисунок 3 – Схема испытаний, схема нагружения и общий вид испытательной установки в опытах [60, с. 22]

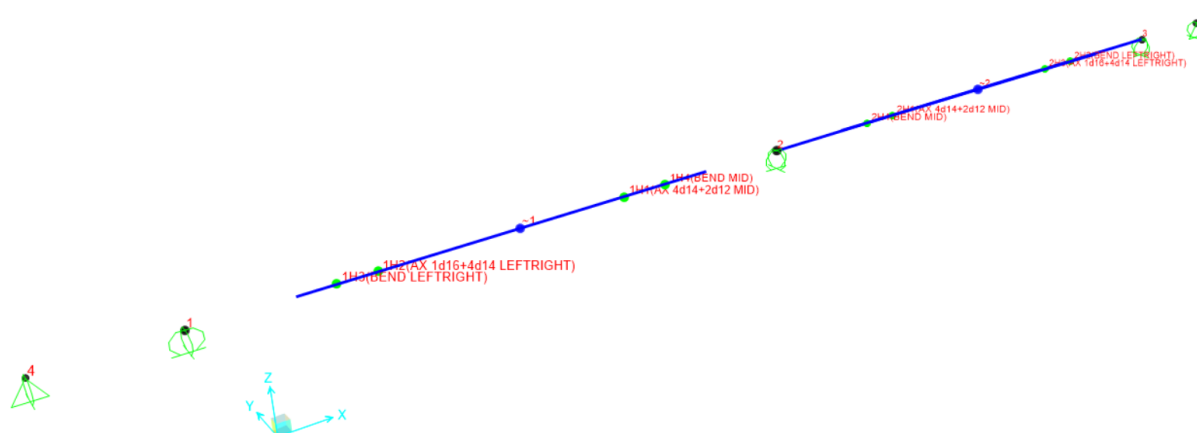


Рисунок 4 – Расчётная схема (цифровой двойник) фрагмента с местами врезки пластических шарниров

На рисунке 5 показаны примеры диаграмм, описывающих осевые «N-w» и изгибные «M-θ» пластические шарниры для различных конфигураций расположения арматурных стержней в пролётных и опорных сечениях, как это было принято в опытах [12]. При опре-

делении параметрических точек диаграммы, описывающей осевой пластический шарнир, использовали правила, разработанные для случая, когда в одном сечении использованы стержни разных диаметров.

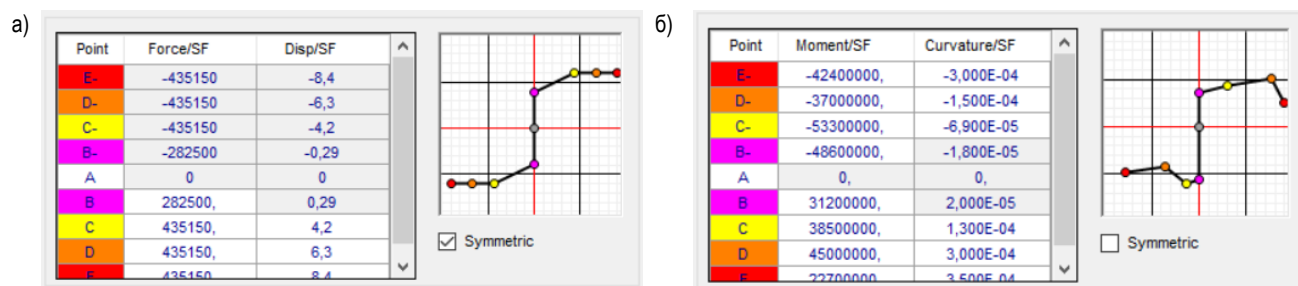


Рисунок 5 – Диаграммы для описания осевых (а) и изгибных пластических шарниров (б)

2.2 Ступенчатое приложение гравитационной нагрузки, моделирующее внезапное удаление колонны

Метод энергетического баланса (ЕВМ) предполагает, что внезапное разрушение / удаление колонны, по своей сути, аналогично мгновенному приложению действующих гравитационных нагрузок (см. рисунок 6).

Неявная ошибка этой гипотезы возникает из-за принятого допущения о том, что вся работа, совершаемая гравитационными нагрузками, считается динамической, в то время как на самом деле часть

этой внешней работы является статической, сгенерированной предварительными деформациями элементов конструктивной системы, действующих до удаления колонны (в ряде работ российских исследователей [14, 17, 18], относящихся к школе академика В. И. Колчунова использован термин «статико-динамическое деформирование»). При использовании метода энергетического баланса (ЕВМ) это допущение приводит, как правило, к завышению / переоценке максимальных динамических прогибов / перемещений.

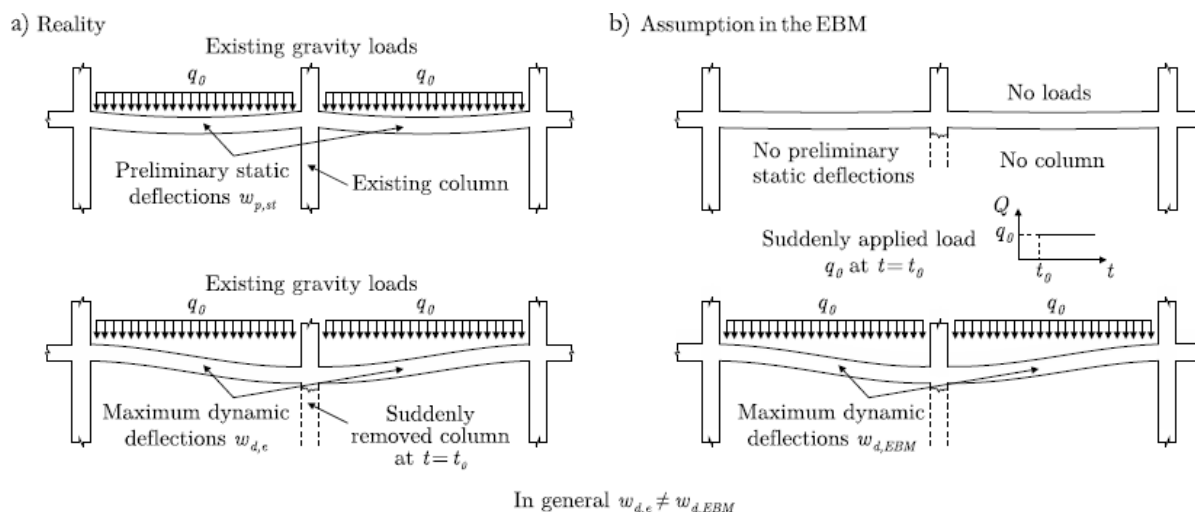


Рисунок 6 – Различие между фактическим поведением нагруженной конструктивной системы при удалении центральной колонны (а) и поведением при эквивалентном ступенчатом нагружении по методу энергетического баланса (б) [16, с. 39]

Кроме того, повреждённый фрагмент конструкции, подвергающийся равномерной ступенчатой нагрузке, получает максимальные динамические прогибы в средней контрольной точке, в которой было произведено удаление колонны. Однако аналогичные фрагменты, подвергающиеся реальным сценариям разрушения колонн, не всегда демонстрируют максимальные динамические прогибы в середине пролёта. Это зависит от расположения удалённой колонны в пределах повреждённой ячейки.

В общем случае можно предположить, что ступенчатая или пошаговая гравитационная нагрузка аналогична внезапному удалению колонны, если динамические прогибы, вызванные ступенчатой нагрузкой, намного больше предварительных статических прогибов $w_{p,st}$, вызванных гравитационными нагрузками в неповреждённой конструктивной системе, приложенными до удаления колонны. В этом случае общая внешняя работа, совершаемая гравитационными нагрузками, практически не отличается для ступенчатого приложения гравитационной нагрузки и её однократного динамического приложения после внезапного удаления колонны. В работах [3, 16] было показано, что разница в максимальном динамическом прогибе между точным аналитическим решением для динамического прогиба $w_{d,e}$ и решениями, полученными по методу энергетического баланса (ЕВМ) $w_{d,EBM}$, незначительна.

В нашей работе [13] было показано, что это допущение приводит к большим ошибкам, когда конструкция остаётся в упругой области

при ступенчатой нагрузке, поскольку разница между предварительными статическими и динамическими прогибами становится значительно меньше. Неупругое/нелинейное поведение элементов конструкции приводит к большим динамическим прогибам и, следовательно, к меньшим относительным ошибкам.

Чтобы проанализировать влияние этого допущения на точность результатов, в работе [15] было проведено исследование параметров, упрощённых линейных упругих систем, для которых можно получить точное аналитическое решение для максимального динамического перемещения.

Сначала была проанализирована линейно-упругая реакция двухпролётной балки с шарнирным опиранием при переменном положении (описываемом параметром Δ) удаляемой колонны, смещаемой вдоль пролёта, как показано на рисунке 7а). Балка была нагружена равномерно распределённой гравитационной нагрузкой. Исходные статические прогибы $w_{p,st}$, а также максимальные динамические прогибы для точного аналитического решения $w_{d,e}$ и для метода энергетического баланса (ЕВМ) $w_{d,EBM}$ были рассчитаны для различных положений внезапно удаляемой колонны, их отношения показаны на рисунке 7б).

Когда удаляемая колонна / опора находится в центре балки, предварительные статические прогибы достаточно малы, и разница между аналитическим решением и решением методом конечных элементов незначительна. Если опора расположена эксцентрично

со смещением от центра балки (например, на расстоянии $L_b/6$ от опоры балки), предварительные статические прогибы более значительны, и разница между результатами решений гораздо больше. Более того, можно отчётливо видеть, что максимальный динамический прогиб для решения методом конечных элементов имеет место в центре балки, в то время как для точного аналитического решения он немного смещён в сторону удалённой колонны. В работе [15] показано, что метод энергетического баланса (ЕВМ) всегда даёт более высокие максимальные динамические прогибы, чем точное аналитическое решение. Этот вывод был подтверждён собственными исследованиями [13].

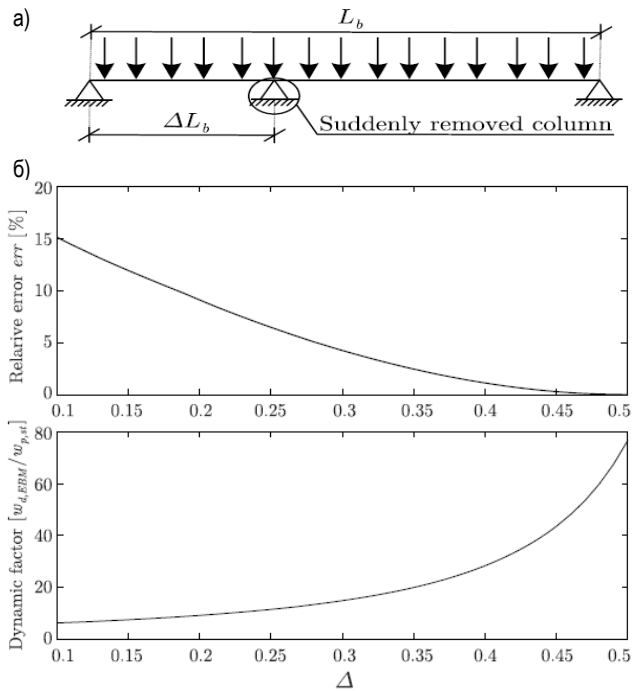


Рисунок 7 – Относительная ошибка определения максимальных динамических перемещений методом энергетического баланса и отношения динамических ($w_{d,EBM}$) и статических (w_{st}) линейно-упругих прогибов при изменении положения опоры в пролёте Δ для балки нагруженной равномерно распределенной нагрузкой согласно [15, с. 3469]

На рисунке 7б показан график относительной ошибки (err) между максимальным динамическим прогибом балки для точного аналитического решения и решения, полученного методом энергетического баланса (ЕВМ) для различных значений параметра Δ (параметр, показывающий положение удаляемой опоры в долях пролёта неразрезной балки ΔL_b , см. рисунок 7а). Кроме того, показан график, связывающий отношение максимального динамического прогиба $w_{d,EBM}$, вызванного ступенчатой нагрузкой, к максимальному

начальному статическому прогибу $w_{p,st}$, вызванному той же нагрузкой. Когда удаляемая опора находится в центре балки относительная погрешность практически равна нулю и увеличивается при уменьшении Δ , то есть при приближении колонны к крайним опорам и формировании асимметрии конструкции.

Для рассмотренного случая при значении $\Delta = 0,3$ ошибка составляет около 5 %, что является типичной погрешностью, которую возможно допустить в инженерных расчётах при проектировании конструкций. Эти результаты показывают, что для распространённых конфигураций каркасных конструктивных систем допущение о ступенчатом приложении нагрузки, моделирующем внезапное удаление внутренней колонны / опоры не приводит к большим относительным ошибкам. Это означает, что конфигурации конструктивных систем со значениями коэффициента Δ , которое приближается к 0,5 (как на рисунке 7б), показывают небольшие относительные погрешности, обеспечивая точность метода.

Нагружение выполняли тремя сосредоточенными силами (приложенными в середине пролёта и на опоре). Принимали переменное положение опоры (в центре пролёта и 1/3 пролёта) как показано на рисунке 8. Принятое положение опоры принято рассматривать как граничное при реальном проектировании. При прямом динамическом анализе принимали время приложения нагрузки 0,008 с и переменные значения коэффициента демпфирования $\xi = 0 \%$; 1 %; 5 %. Результаты расчётов статических и динамических перемещений при различных уровнях нагружения (в долях от предельной нагрузки), различных коэффициентах демпфирования для случая симметричного и эксцентричного размещения опоры в пролёте приведены в таблицах 1 и 2. Как видно, в таблицы 1 и 2 не включены результаты вычисления ошибки для случаев, когда коэффициент демпфирования был принят равным $\xi = 0$ (как уже отмечалось ранее метод энергетического баланса не учитывает в явном виде коэффициента демпфирования). Для случая $\xi = 0$ практически не наблюдается отличий в кривых динамической несущей способности, рассчитанной пошаговым прямым нелинейным динамическим анализом (IDA) и квазидинамической несущей способности, определенной методом энергетического баланса (ЕВМ), как это показано на рисунке 10. Следует отметить, что такое совпадение возможно только в том случае, когда адекватно определена нелинейная статическая реакция из которой перестраивают квазидинамическую кривую.

При анализе прогибов и соответствующих ошибок моделирования, приведенных в таблицах 1 и 2, в первую очередь обращает на себя внимание следующее обстоятельство. В стадии упругой работы, когда уровень нагружения не превышает примерно 30 % от предельной нагрузки относительная ошибка при коэффициенте демпфирования $\xi = 1 \%$ составляет от 4 % до 6 %, что соответствует результатам, полученным в работах [3, 15] при смещении опоры в линейно-упругих системах. Таким образом смещение опоры в 1/3 пролёта практически не повлияло на относительную ошибку моделирования, при том, что отношение максимального динамического прогиба к начальному статическому прогибу до удаления колонны (w_{IDA} / w_{st}) уменьшилось с 285 до 59,3.

Таблица 1 – Значения статических и динамических прогибов, определенных прямым динамическим анализом (IDA) и по методу энергетического баланса (ЕВМ) при различных коэффициентах демпфирования

Уровень нагружения P/P_u	w_{st} [мм]	$\xi = 1 \%$				$\xi = 5 \%$			
		w_{EBM} [мм]	w_{IDA} [мм]	IDA/ST	err , %	w_{EBM} [мм]	w_{IDA} [мм]	IDA/ST	err , %
0,1	0,08	2,22	2,10	26,25	5,04	2,22	1,82	22,75	18
0,2	0,15	4,43	4,13	27,53	6,8	4,43	3,64	24,27	18
0,3	0,22	6,65	6,20	28,18	6,8	6,65	5,50	30	18
0,6	0,37	17,00	13,40	45,9	21,9	17,00	10,2	45,9	40
0,7	0,45	40,00	27,00	59,70	32,5	40,00	16,40	88,9	59
0,8	0,52	90,00	61,30	78,46	31,9	90,00	36,00	173,7	60
0,9	0,60	139,00	105,00	117,98	24,5	139,00	65,5	231,7	52,9
1,0	0,70	200,00	160,00	285,00	20	200,00	91,00	285,7	52,00

Таблица 2 – Значения статических и динамических прогибов, определенных прямым динамическим анализом (IDA) и по методу энергетического баланса (EBM) при различных коэффициентах демпфирования (асимметричный фрагмент)

Уровень нагружения	w_{st} , мм	$\xi = 1\%$			
		WEBM	WIDA	IDA/ST	err, %
0,1	0,20	1,61	1,55	8,05	4
0,25	0,40	3,22	3,10	8,05	4
0,38	0,58	4,82	4,63	8,31	4
0,63	1,00	10,20	9,32	10,20	9
0,75	1,16	17,6	15,10	15,17	14
0,88	1,35	43,7	31,70	32,37	27
1,00	1,55	91,90	71,00	59,3	23

При переходе к уровню нагружения, при котором образуются пластические шарниры, происходит резкое увеличение относительной ошибки

при значениях коэффициентов демпфирования отличных от нуля, тогда как кривые динамической и квазидинамической реакций по-прежнему совпадают, и относительная ошибка стремится к нулю (см. рисунок 8).

Результаты, полученные при коэффициенте демпфирования $\xi = 1\%$ для симметричного и несимметричного фрагментов приведены в таблицах 1 и 2. Из сравнения параметров, приведенных в таблицах 1 и 2 видно, начальные максимальные статические прогибы w_{st} элементов двухпролётного фрагмента с несимметричным расположением пролётов примерно в два раза превышали начальные прогибы элементов с симметричным расположением пролётов. Однако даже при коэффициенте демпфирования $\xi = 1\%$ это мало повлияло на относительную ошибку моделирования. При этом в упругой стадии полученные значения относительной ошибки как для симметричных, так и несимметричных систем находились в пределах от 4 % до 6 %.

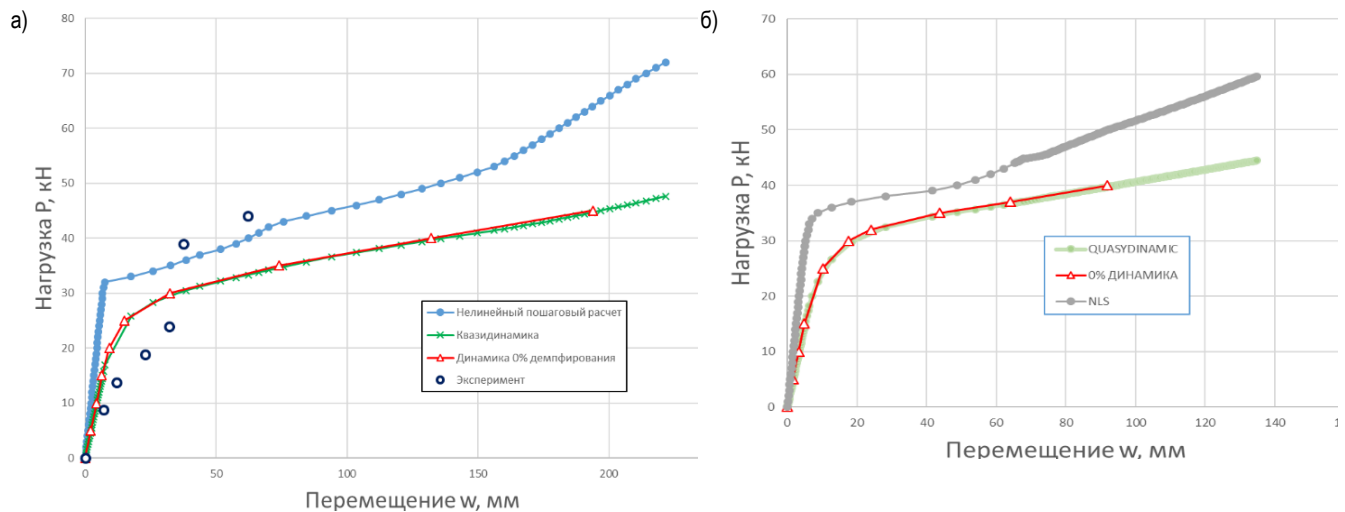


Рисунок 8 – Зависимости «P-w» для опытного фрагмента двухпролётной балки с симметричным (а) и несимметричным (1/3 пролёта) (б) расположением опоры при коэффициенте демпфирования $\xi = 0$

По результатам выполненного анализа может быть сформулировано общее правило, которое следует применять при проектировании конструктивных систем в особой расчётной ситуации: чем более симметрична исходная конфигурация конструктивной системы, тем меньше будут предварительные/начальные статические прогибы её элементов (до удаления колонны) и, следовательно, меньше будет погрешность максимального динамического прогиба, определяемого пошагово методом энергетического баланса (EBM), когда очередные ступени нагрузки прикладывают к недеформированной системе.

2.3 Поврежденная подсистема (ячейка) ведёт себя как система с одной степенью свободы

Следующее, и возможно основное допущение метода энергетического баланса (EBM) заключается в предположении о том, что реакция части конструктивной системы (как правило отдельной ячейки), подвергшейся разрушению/удалению колонны, контролируется одним режимом деформации (формой колебаний) и что эта форма колебаний остаётся неизменной на протяжении всего динамического отклика. Другими словами, в методе энергетического баланса сделано допущение о том, что поврежденная ячейка/подсистема ведёт себя как система с одной степенью динамической свободы.

Неявная ошибка при использовании метода энергетического баланса (EBM) возникает из-за предположения, что максимальная динамическая реакция реализуется тогда, когда кинетическая энергия всей подсистемы в какой-то конкретный момент времени становится равной нулю.

Следует отметить, что реальные конструкции представляют собой совокупность распределённых масс с бесконечным числом степеней свободы. Таким образом, они обладают бесконечным числом собственных периодов и форм колебаний. Каждая из этих форм колебаний по-разному возбуждается динамическими нагрузками, достигая своего максимального отклика, как правило, в разные моменты времени. Поэтому требование о том, чтобы скорость перемещения всех масс и кинетическая энергия всей системы элементов конструкции были равны нулю одновременно в некоторый конкретный момент времени, для реальных систем с несколькими (или множественными) степенями свободы (MDOF), как правило, не выполняется. Следовательно, при использовании метода энергетического баланса (EBM) в реальных конструкциях запасённая энергия деформации подсистемы всегда завышается, как и максимальные динамические прогибы. С другой стороны, при использовании метода энергетического баланса (EBM) несущая способность рассматриваемой системы практически всегда занижается [3, 15].

Метод энергетического баланса (EBM) применительно к реальным конструктивным системам не имеет строгого теоретического обоснования. Кроме того, горизонтальные колебания, связанные, например, с сейсмическим воздействием, которые приводят к горизонтальным перемещениям перекрытий, не учитываются, поскольку метод в традиционном представлении предполагает учёт вертикальных прогибов при действии гравитационных нагрузок. Следовательно, при расчёте реакции конструктивной системы рассматривают только вертикальные колебания несущей конструкции после удаления колонны, поскольку они являются преобладающими.

Чтобы повысить точность метода энергетического баланса (ЕВМ), предполагая, что подсистема нагружена равномерно распределенной или симметричной нагрузкой, всегда целесообразно выбрать в качестве точки отсчёта для эквивалентной системы с одной степенью свободы точку, лежащую на линиях геометрической симметрии подсистемы. Например, для сценариев удаления внутренних колонн в качестве точки отсчёта удобно выбрать середину балки или плиты. Таким образом, влияние всех асимметричных форм деформаций не учитывается, и в реакции, скорее всего, будет преобладать одна форма деформации/колебаний. Следует также отметить, что метод энергетического баланса (ЕВМ), как уже отмечалось ранее, основан на рассмотрении только вертикальных перемещений, которые очень чувствительны к первым нижшим формам/модам колебаний. Чем выше моды колебаний, тем меньше они влияют на прогибы и в целом на реакцию несущей конструкции.

В работах [3, 15] было показано, что пренебрегая демпфированием и используя свойство ортогональности бесконечного числа форм колебаний ϕ_n системы MDOF с многими степенями свободы, в *линейных упругих* системах можно получить полную реакцию конструкции путём применения принципа суперпозиции реакций для каждой отдельной формы колебаний как для системы с одной степенью свободы. Следовательно, типичное решение для определения вектора относительных перемещений $w(t)$ для задачи о свободных колебаниях системы MDOF с несколькими/многими степенями свободы, согласно [15] определяется следующим выражением:

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t)) \phi_n \quad (1)$$

где ϕ_n , ω_n , A_n , B_n – n -ая форма колебаний, частота собственных колебаний, связанная с n -ой формой колебаний, и A_n и B_n – константы интегрирования. Подставив начальные перемещения и скорости ($w(0) = -w_{st}$ и $\dot{w}(0) = 0$), в уравнение (1), получим:

$$w(0) = -w_{st} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \phi_n; \quad (2)$$

$$w'(0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \phi_n. \quad (3)$$

Как упоминалось ранее, вклад одних режимов (форм колебаний) в другие, в линейно-упругих системах равен нулю из-за ортогональности между режимами (формами) колебаний. Учитывая это свойство и предполагая, что первая основная форма колебаний ϕ_1 системы имеет форму статической деформации (кривой статических прогибов) под действием равномерной гравитационной нагрузки, в работах [3, 15] были получены следующие значения неизвестных констант интегрирования A_n и B_n :

$$A_1 = -1; A_{2...n} = 0; \quad (4)$$

$$B_{1...n} = 0 \quad (5)$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем:

$$w(t) = -\cos(\omega_1 \cdot t) w_{st}. \quad (6)$$

Подставляя уравнение (6) в уравнение ($w(t)_{abs} = w_{st} + w(t)$), получаем

$$w(t)_{abs} = w_{st} \cdot (1 - \cos(\omega_1 \cdot t)), \quad (7)$$

где $w(t)$ – динамическое перемещение, измеренное от положения статического равновесия w_{st} под действием гравитационной нагрузки;

$w(t)_{abs}$ – абсолютное перемещение.

Таким образом, *линейно-упругие конструкции* с несколькими степенями свободы, подверженные внезапному приложению равномерно распределенной нагрузки, на протяжении всего динамического отклика имеют одну форму колебаний, соответствующую ста-

тической форме деформации (деформированной схемы) повреждённой системы при равномерно распределенной нагрузке.

Тот же результат получается при использовании зависящих от силы векторов Ритца в качестве форм колебаний [14]. Первый вектор Ритца – это функция распределения статического прогиба, соответствующая ступенчатому приложению гравитационной нагрузки. Дальнейшие векторы Ритца не возбуждают ни одну массовую степень свободы и не учитываются. Таким образом, конструкция имеет только одну основную форму колебаний. Это означает, что для линейно-упругих систем метод энергетического баланса (ЕВМ) является достаточно точным в этом аспекте. Однако для *нелинейных динамических реакций эти предположения не выполняются*, и метод даёт приближенные результаты, содержащие погрешности.

С другой стороны, поведение неупругих систем не сильно отличается от поведения упругих систем. Следовательно, разумно ожидать, что неупругие реакции слабо связаны [9] и что первый вектор Ритца, зависящий от нагрузки, для каждой независимой нелинейной деформации доминирует над реакцией.

Оценка невязной погрешности при использовании метода энергетического баланса (ЕВМ) для анализа нелинейных динамических реакций конструкции является непростой задачей. Эта погрешность зависит от большого количества переменных, таких как конфигурация конструктивной системы, геометрия, расположение и размеры пластических шарниров или линий текучести (линейных пластических шарниров), нелинейное поведение материала, предполагаемый уровень нагрузки и т. д. Таким образом, не существует универсальной процедуры, которая позволила бы однозначно определить погрешность, возникающую при расчётах динамических перемещений с использованием метода энергетического баланса (ЕВМ) для неупругих систем.

Чтобы проиллюстрировать названные проблемы, рассмотрим простой пример. В работе [15] был выполнен динамический анализ балки, защемленной по концам и подверженной действию равномерно распределённой ступенчатой нагрузки на разных уровнях. Балка считалась невесомой (динамическая масса была связана с приложенными нагрузками), имела постоянное поперечное сечение из изотропного материала. При нелинейном динамическом анализе с учётом истории нагружения не учитывали эффекты демпфирования и влияние скорости деформации/нагружения на свойства материалов. Предполагалось, что материал обладает идеальным упругопластическим поведением с образованием пластических шарниров, в которых сосредоточена вся пластическая деформация.

Как статический, так и динамический анализ с учётом истории нагружения был выполнен с помощью программного обеспечения SAP2000.

Результаты анализа показаны на рисунке 9. На верхнем графике представлена зависимость нелинейных статических и динамических характеристик от нагрузки и коэффициента пластичности, а также кривая динамической несущей способности. Различные фазы работы неупругой конструктивной системы (а), (б) и (в) также показаны на графике нелинейного статического отклика на рисунке 9. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что нелинейная статическая реакция представлена здесь упрощённой трёхлинейной диаграммой.

Аналогичным образом был выполнен нелинейный статический анализ при пошаговом нагружении двухпролётного фрагмента, описанного в разделе 2.2. Далее, с использованием положений метода энергетического баланса (ЕВМ), была перестроена квазидинамическая кривая несущей способности (см. рисунок 10). С использованием прямого пошагового нелинейного динамического анализа, была получена кривая динамической несущей способности. На рисунке 10 показаны последовательные этапы установления квазидинамической реакции и её сравнение с кривой динамической несущей способности, полученной прямым динамическим нелинейным анализом. Как видно из графиков, показанных на рисунке 15, при коэффициенте демпфирования $\xi = 0$ результаты расчётов квазидинамической кривой и динамической кривой совпадают практически полностью на всём диапазоне нагружений, и вычислительная ошибка стремится к нулю.

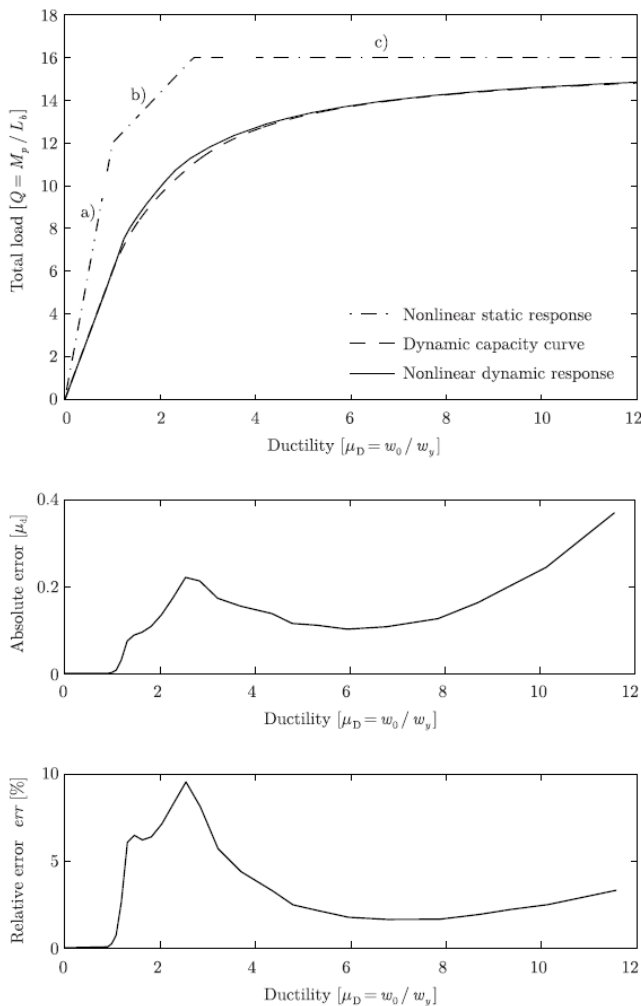


Рисунок 9 – К оценке относительной ошибки моделирования при анализе защемлённой балки при разных уровнях нагружения согласно [15, с. 3472]

На нижних графиках, показанных на рисунке 9, представлены абсолютные и относительные ошибки максимальных динамических прогибов, установленных прямым нелинейным динамическим анализом с историей нагружения $w_{d,e}$, рассчитанных с помощью комплекса SAP2000 и кривой динамической (квазидинамической) реакции (несущей способности) $w_{d,EBM}$, рассчитанной с помощью метода энергетического баланса (EBM) для нескольких уровней нагружения. Эти погрешности представлены в зависимости от возрастающего коэффициента пластичности и уровня нагружения, чтобы упростить сравнение с результатами различных подходов к анализу.

Из рисунка 9 видно, что на этапе линейно-упругой деформации погрешность метода энергетического баланса EBM при оценке максимального динамического прогиба равна нулю. На этом этапе на протяжении всего динамического отклика конструкции форма деформации остаётся такой же, как описано выше, и система представляет собой конфигурацию, в которой энергия является только потенциальной.

Таким образом, этот пример подтверждает, что метод энергетического баланса (EBM) даёт такое же решение для линейных упругих систем, как и строгий нелинейный динамический анализ с историей нагружения, рассчитанный с помощью конечно-элементной модели (FEM). Другими словами, на упругом этапе нагружения кривая динамической несущей способности практически полностью соответствует кривой нелинейной динамической реакции.

Как только в опорных узлах балки достигается пластический момент M_p , сразу возникает относительно большая погрешность из-

за образования пластических шарниров, которые мгновенно изменяют конфигурацию конструктивной системы и увеличивают её эффективную жёсткость. Это увеличение вызвано переходом к конструкции, показывающей упругопластическое поведение, поскольку перераспределение эффектов воздействий локализуется в областях шарниров, а прогиб в центре практически не увеличивается. В реальных конструкциях шарниры постепенно перераспределяют усилия, и эта погрешность будет меньше. Дополнительным источником ошибок на этом этапе является тот факт, что динамическая реакция больше не может быть представлена в виде уникальной/единственной формы колебаний (смотри [15]), но для нагрузок, близких к предельным, эта ошибка не имеет значения, поскольку реакция балки по-прежнему, в основном упругая. Дискретно-континуальная система, в которую превращается балка после образования пластических шарниров, фактически является нерегулярной, и форма колебания в общем случае не соответствует колебаниям континуальной системы.

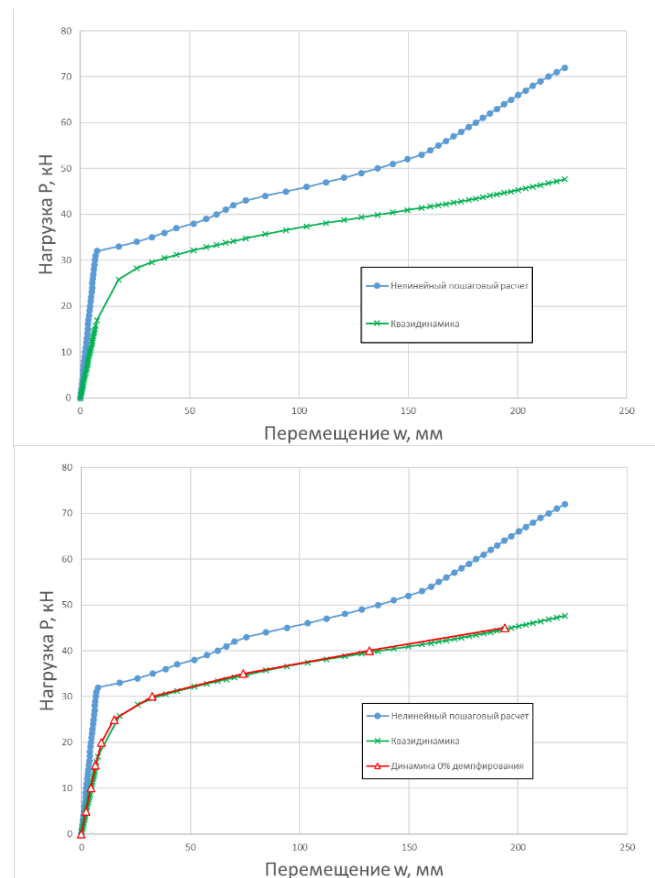


Рисунок 10 – Этапы построения квазидинамической кривой (а) и сравнение с динамической кривой, полученной прямым нелинейным пошаговым динамическим анализом при коэффициенте демпфирования $\xi = 0$

При дальнейшем увеличении нагрузки ошибка стабилизируется по мере перераспределения локальной нагрузки между шарнирами. Однако ошибка, связанная с учётом только одной формы колебаний, начинает увеличиваться, как только конструкция показывает значительную неупругую реакцию. Этот момент можно наглядно увидеть на примере рисунка 9, когда достигается значение коэффициента пластичности, равное двум и в таблицах 1 и 2 при уровне нагружения более 0,5.

С этого момента ошибка быстро возрастает, пока не достигнет максимума при значении коэффициента пластичности около 2,5, или уровне нагружения ($\lambda \approx 0,9$) непосредственно перед формированием

механизма разрушения. В этот момент реакция примерно наполовину упругая, как у защемлённой балки, и наполовину упругопластическая, поэтому нет явного доминирующей формы колебания, который точно отражал бы всю динамическую реакцию.

По мере достижения пластического момента (образования пластического шарнира) в центре балки, конфигурация конструкции меняется на механизм разрушения, снижая кажущуюся жёсткость системы. Здесь перераспределение усилий из-за разгрузки шарниров локализуется в средней точке балки, и поэтому прогиб в центре значительно увеличивается. Этот эффект вызывает монотонное уменьшение погрешности, достигающей минимума при значениях коэффициента пластичности ($\mu = \Delta_u / \Delta_y$) около 6 (рисунок 9), когда локальное перераспределение завершается и погрешность стабилизируется.

Если рассматривать полный динамический отклик при больших уровнях нагрузки, то можно выделить упругую, упругопластическую фазы и фазу разрушения (фазы (а), (б), (в) на рисунке 9). Однако при относительно больших значениях коэффициента пластичности ($\mu = \Delta_u / \Delta_y$), фаза разрушения имеет большее значение для динамического поведения системы и способна точно воспроизводить большую часть динамического отклика, что приводит к приемлемым ошибкам.

Наконец, кривая динамической несущей способности и нелинейная динамическая реакция становятся почти горизонтальными, и небольшое увеличение общей нагрузки приводит к значительному увеличению перемещения, что делает метод энергетического баланса (EBM) более чувствительным к ошибкам перемещения, используя в качестве эталона для сравнения конкретный уровень нагрузки. Как абсолютная, так и относительная ошибка будут бесконечно расти, но это не имеет значения, поскольку коэффициент пластичности более 12 не характерен для реальных конструкций из классических строительных материалов, и поэтому ошибка должна оставаться в допустимом диапазоне ниже 5 %.

Несмотря на то, что при проведении анализа были приняты некоторые упрощения, при использовании метода энергетического баланса не ожидается значительных отклонений в результатах для реальных конструкций, подвергающихся ступенчатой гравитационной нагрузке, без учёта влияния демпфирования и скорости деформации. Практически полное сходство между кривой динамической (квазидинамической) несущей способности, полученной методом энергетического баланса и нелинейной динамической реакцией с учётом истории нагружения показывает, что неупругие системы с несколькими степенями свободы, подверженные внезапному удалению колонны, для оценки максимальной динамической реакции могут быть смоделированы как эквивалентные неупругие системы с одной степенью свободы.

Из сравнения кривых, описывающих нелинейную динамическую реакцию, и кривых динамической несущей способности балки, полученных методом EBM, можно легко убедиться в том, насколько точные результаты даёт метод энергетического баланса. Несмотря на то, что при этом анализе было сделано несколько упрощений, для реальных конструкций, подвергающихся ступенчатой гравитационной нагрузке без учёта демпфирования и скорости деформации, отклонения в точности этого подхода будут не столь значительными. Таким образом, в данном случае большинство конструкций допустимо моделировать как систему с одной степенью динамической свободы.

2.4 Демпфирование и рассеивание энергии

Следующее упрощение метода энергетического баланса (EBM) заключается в том, что вся потенциальная энергия, вносимая в систему нагрузками, преобразуется в исключительно чистую энергию деформации. Другими словами, метод энергетического баланса EBM неявно игнорирует/не учитывает энергию, рассеиваемую за счёт демпфирования, трения или других механизмов, и поэтому переоценивает максимальную динамическую реакцию рассматриваемой системы. Этот подход также не учитывает энергию, рассеиваемую при трещинообразовании бетона. Следовательно, принимается допущение о том, что возможные различия между энергиями разрушения при статических и динамических воздействиях не имеют суще-

ственного значения и не учитываются в данном методе. Часто вся эта энергия разрушения просто учитывается в анализе как часть энергии, рассеиваемой при демпфировании.

Примечание – Термины «демпфирование» и «рассеивание (диссипация)» энергии плотно связаны, но не являются полными синонимами. Рассеивание – это физический процесс потери энергии, а демпфирование – это совокупный результат этого процесса, выраженный в снижении амплитуды колебаний.

Поскольку максимальная динамическая реакция при внезапном удалении колонны обычно достигается примерно в середине первого полупериода колебания, на первом этапе разумно предположить, что энергия, рассеиваемая за счёт демпфирования и трещинообразования в течение этого короткого периода, невелика по сравнению с общей поглощённой энергией деформации конструктивной системы. Однако следует также отметить, что после того, как конструкция деформируется, частоты колебаний уменьшаются, и первое колебание становится наиболее продолжительным. Следовательно, энергия, рассеиваемая за счёт демпфирования и трещинообразования до достижения максимальной реакции, больше при неупругих деформациях. Поэтому важно оценить влияние этого явления на максимальные динамические перемещения. В этой области было проведено довольно обширное исследование параметров повреждённых конструктивных систем для оценки влияния демпфирования на величину динамического перемещения [3, 15, 16].

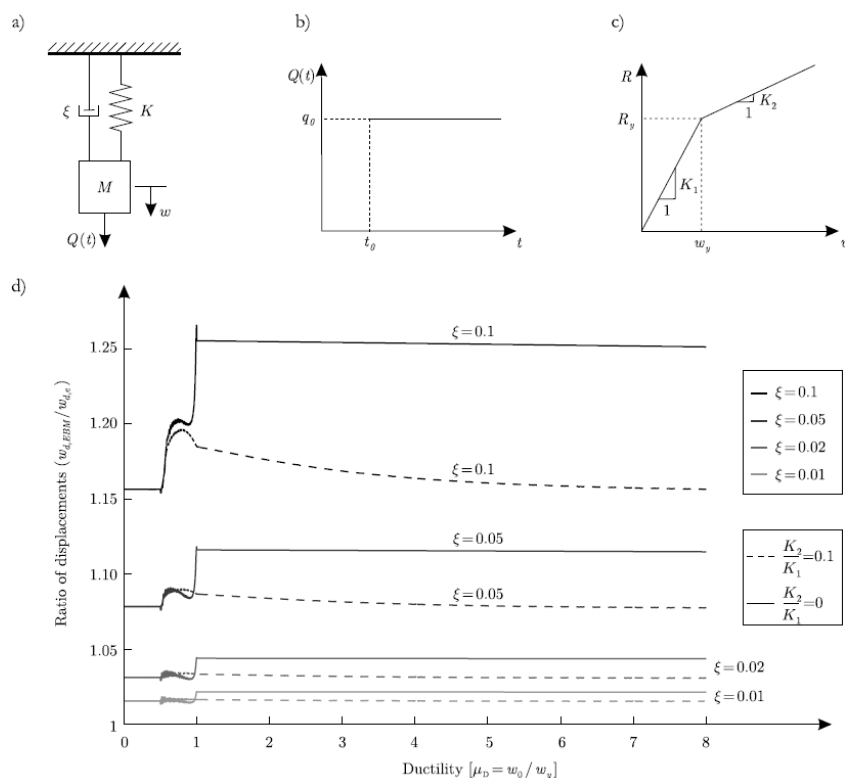
Важным недостатком, имеющим место при изучении влияния демпфирования при сценарии внезапного удаления колонны, является необходимость определения того, какой тип демпфирования лучше имитирует механизм рассеивания энергии для данной конструктивной системы в зависимости от конструктивного решения каркаса и его узлов. Специалисты обычно моделируют рассеиваемую энергию с помощью вязкостного демпфирования, которое связано со скоростью движения системы [5–7]. Однако существуют и другие подходы [7], такие как демпфирование по Кулону, которое связано с трением, а также такие, которые учитывают жёсткий контакт между элементами конструкции, например, соударение. Надо сказать, что разные модели следует выбирать для различных расчётных сценариев и конструкции каркасов.

В настоящем исследовании параметров использовали вязкостное демпфирование, применяемое в программном комплексе SAP 2000. Чтобы получить адекватную модель и более точно оценить влияние рассеиваемой энергии на максимальную динамическую реакцию системы, были проведены дополнительные исследования механизмов рассеивания при сценариях внезапного удаления колонны.

В предыдущем разделе было описано, что конструктивные системы с многими степенями свободы (MDOF), подверженные равномерно распределённой ступенчатой нагрузке, могут быть эффективно смоделированы как эквивалентные системы с одной степенью свободы. Для предварительного исследования параметров в работе [15] использовали простую эквивалентную модель, состоящую из билинейной системы с одной степенью свободы, подверженной ступенчатой нагрузке, с различными постоянными коэффициентами демпфирования ξ , как показано на рисунке 11. Основным преимуществом этой простой модели является возможность получения аналитических решений задачи и, следовательно, более точная оценка результатов, полученных методом энергетического баланса (EBM) с учётом этого допущения.

Рассматриваемыми переменными для этого простого параметрического исследования являются коэффициенты демпфирования ξ и отношение упругопластической жёсткости K_2 к упругой жёсткости K_1 (см. рисунок 11). Для коэффициентов жёсткости использовали верхнюю и нижнюю границы 10 % (для типичных конструктивных систем) и 0 % (чистое упругопластическое поведение) соответственно. Рассматривали различные коэффициенты вязкого демпфирования от 1 % до 10 %, как показано на рисунке 11d.

На рисунке 11d максимальные динамические перемещения при использовании метода энергетического баланса (EBM) $w_{d,EBM}$ (без учёта демпфирования) сравнивали с перемещениями, полученными с помощью аналитического решения с учётом демпфирования $w_{d,e,EBM}$ для более высоких значений коэффициента пластичности.



а) эквивалентная система с одной степенью свободы (SDOF); б) история пошагового нагружения; в) билинейная функция сопротивления; д) результаты, полученные при различных соотношениях жесткостей и коэффициентов демпфирования
Рисунок 11 – Параметрическое исследование влияния вязкого демпфирования на результаты вычисления динамического перемещения при использовании метода энергетического баланса [15, с. 3472]

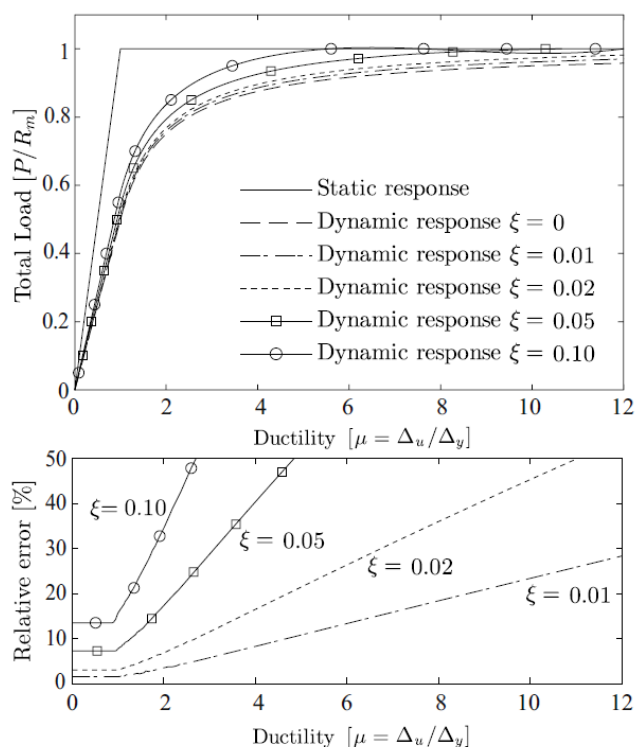


Рисунок 12 – К оценке влияния различных значений коэффициента демпфирования ξ на величину максимального динамического перемещения для системы с одной степенью динамической свободы согласно [15, с. 3472]

Из полученного отношения перемещений можно сделать дополнительные выводы. По сути, как и ожидалось, при увеличении коэффициента демпфирования результаты, полученные методом энергетического баланса (ЕВМ), *переоцениваются по экспоненциальной зависимости* и снижаются для больших значений коэффициента пластичности.

Чтобы получить верхнюю границу возможной относительной ошибки при использовании метода энергетического баланса (ЕВМ), в работе [15] была дополнительно исследована идеальная упруго-пластическая система с одной степенью свободы ($K_2/K_1=0$), аналогичная описанной на рисунке 11. Результаты этого анализа представлены на рисунке 12. На этом рисунке показана зависимость нелинейной статической и динамической реакции описанной системы от нагрузки и пластичности при различных коэффициентах вязкого демпфирования ξ , как и на рисунке 11.

Дополнительно было выполнено сравнение и установлены относительные ошибки моделирования квазидинамической реакции при различных значениях коэффициента демпфирования ($\xi = 0, 1, 5, 10\%$), применяемого при прямом нелинейном динамическом анализе железобетонной двухпролётного балочного фрагмента, описанного в разделе 2.2. Результаты расчётов при разных значениях коэффициентов демпфирования показаны на рисунке 13, а изменение относительной ошибки в зависимости от уровня нагрузки – на рисунке 14.

Как видно из графиков, показанных на рисунке 13, при коэффициенте демпфирования равного 1 % кривая динамической реакции тяготеет к кривой квазидинамической реакции и динамической реакции при коэффициенте демпфирования 0 %. Вместе с тем, при коэффициенте демпфирования равном 10 % динамическая кривая стремится к нелинейной статической реакции, что практически полностью исключает колебательный процесс. Близкий результат имеет место и при общепринятом для железобетона коэффициенте демпфирования 5 %.

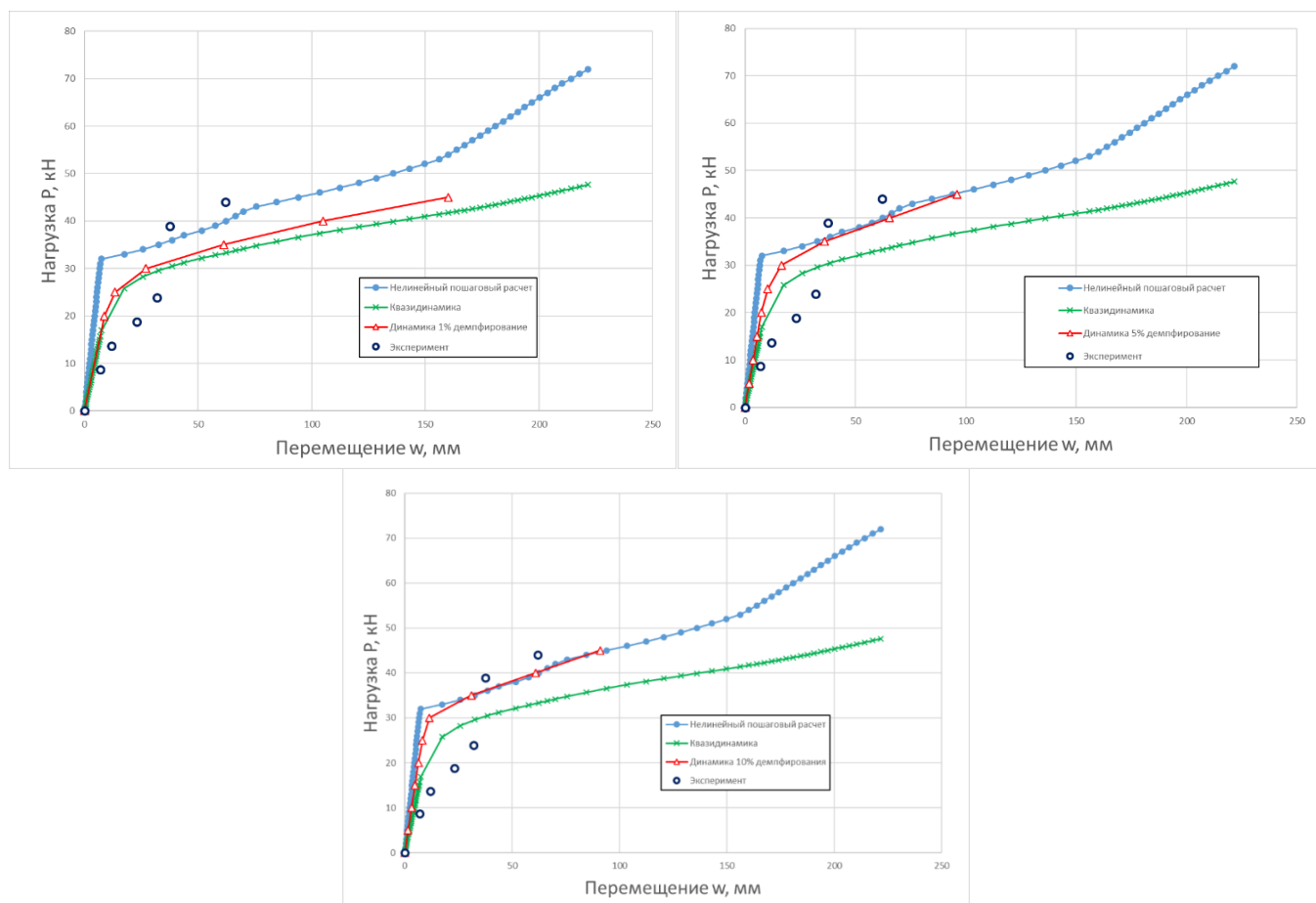


Рисунок 13 – Сравнение динамического расчета при различных коэффициентах демпфирования ($\xi = 1\%$, 5% , 10%) с нелинейным пошаговым и квазидинамическим расчетом согласно ЕВМ

Коэффициент демпфирования до 5% приводит к умеренной переоценке перемещений, при этом отклонение в оценке максимального динамического перемещения составляет около 10% . Более низкие значения коэффициентов демпфирования также приводят к меньшим различиям между результатами линейного упругого и пластического деформирования (значения коэффициента пластичности больше 1) в отношении перемещений. Кроме того, коэффициенты жёсткости не оказывают существенного влияния на результаты при умеренных ($1\text{--}5\%$) коэффициентах демпфирования.

С другой стороны, коэффициенты демпфирования выше 5% приводят к значительным переоценкам, из-за чего метод энергетического баланса (ЕВМ) в этой области даёт значительные отклонения от динамической реакции, которая даёт ненадёжный результат.

Из рисунков 12а и 13 видно, что динамические зависимости нагрузки от коэффициента пластичности для коэффициентов демпфирования до 5% очень похожи на те, что получаются при применении метода энергетического баланса ЕВМ (при $\xi = 0$). При увеличении коэффициентов демпфирования динамическая кривая отклика больше похожа на статическую кривую, особенно после образования пластических шарниров и достижения текучести в арматуре, и полностью соответствует статической кривой отклика при больших значениях коэффициента пластичности (от $\mu_0 = 6$ или $P/P_u = 0,9$ для $\xi = 10\%$).

На рисунке 12б показано, что во время упругой деформации влияние вязкого демпфирования довольно незначительно для большинства распространённых коэффициентов демпфирования в соответствии с результатами, представленными на рисунках 11, 14. Однако, как только конструкция переходит в неупругий режим, относительная погрешность увеличивается примерно линейно пропорционально коэффициенту пластичности системы или уровню действующей нагрузки.

Кроме того, относительные погрешности очень чувствительны к изменению коэффициента демпфирования ξ для нелинейных реакций. В то время как при коэффициенте демпфирования $\xi = 1\%$ относительные погрешности для значений коэффициентов пластичности от двух до четырех составляют менее 10% , то при коэффициенте демпфирования 5% погрешности превышают 20% . Эта тенденция сохраняется при увеличении коэффициента пластичности, уровня нагружения и коэффициента демпфирования. Следует подчеркнуть, что полученный результат показывает скорее *качественный характер* и требует дальнейшей проверки при выполнении сравнительного оценивания при имитационном моделировании реальных конструктивных систем. Необходимо отметить, что эти относительные погрешности, полученные в работе [3, 15] явно завышены, поскольку рассматриваемая нереалистичная идеальная упругопластическая система после достижения текучести и образования пластических шарниров даёт практически горизонтальные участки кривых динамического сопротивления (см. рисунок 12). Следовательно, для конкретного уровня нагрузки, превышающего нагрузку, соответствующую текучести арматуры (образования пластических шарниров), разница между прогибами при разных коэффициентах демпфирования может быть довольно большой, даже если кривые динамического отклика очень похожи, и стремится к бесконечности, когда участки кривых становятся полностью горизонтальными. Реальные конструктивные системы обладают некоторым запасом несущей способности после образования пластических шарниров, и поэтому сопротивление системы не падает резко после достижения текучести арматуры, в частности, когда реализуются мембранные/цепные эффекты, что не учитывается в идеализированной системе и хорошо видно для реального балочного фрагмента (см. рисунок 13). Таким образом, относительные погрешности максимальных перемещений, рассчитанных с помощью метода энергетического баланса (ЕВМ), из-за вязкостного демпфирования всегда меньше, чем те, что показаны на рисунке 12.

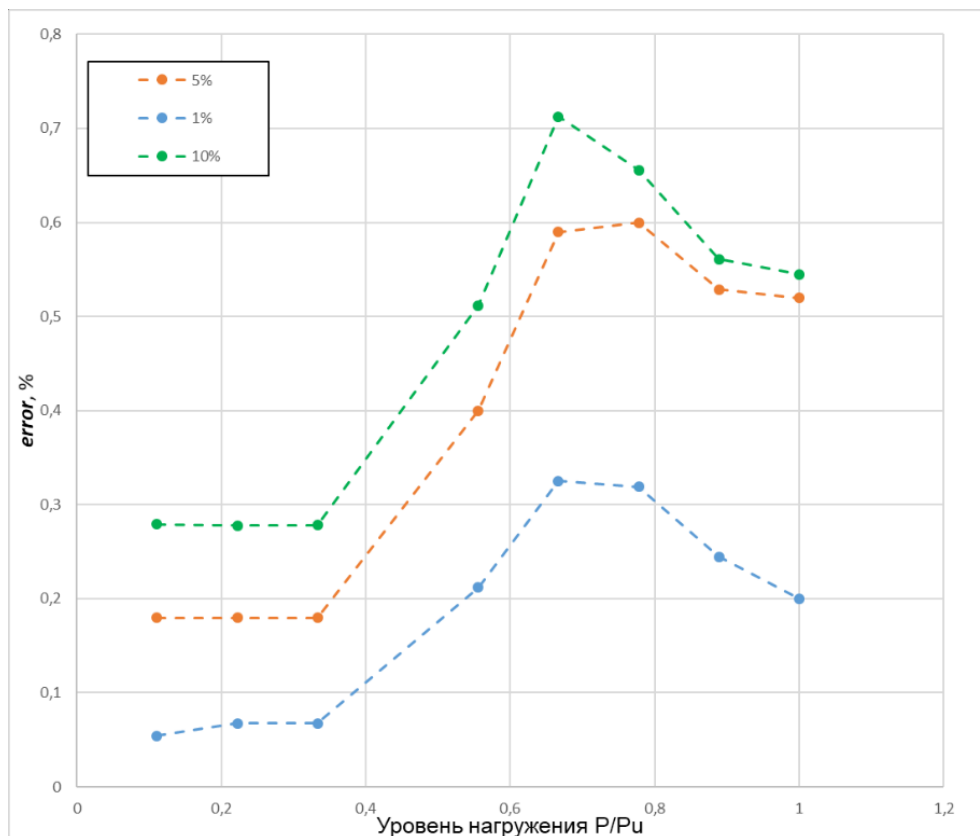


Рисунок 14 – Оценка ошибки моделирования для коэффициентов демпфирования 1 %, 5 %, 10 %

На рисунке 13 нанесены точки динамической несущей способности, полученные при испытании двухпролётного балочного фрагмента каркаса при внезапном приложении гравитационной нагрузки [12], описанного в разделе 2.2. По результатам выполненных испытаний были определены коэффициенты вязкого демпфирования (пользуясь формулой $\ln \frac{\delta_1}{\delta_4} = \frac{6\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$) для различных уровней нагружения.

Установлено, что при низких уровнях нагружения (до $0,5 P_u$) получены оценочные значения коэффициентов вязкого демпфирования от 4 % до 6 %, что даёт среднее значение $\xi = 0,5$, рекомендуемое нормами [19, 20] при проектировании железобетонных элементов, работающих с трещинами. Вместе с тем, для нагрузок, близких к предельным ($0,9 P_u$) коэффициент вязкого демпфирования составлял не менее $\xi \geq 10$ %. Полученные результаты испытаний при нагрузках, близких к предельным приближаются к кривой нелинейной статической реакции. Таким образом, кривая отклика, полученная методом энергетического баланса, практически полностью совпадающая с кривой динамического отклика при $\xi = 0$ является нижним пределом (границей) динамического сопротивления и даёт безопасный (консервативный) результат, тогда как кривая, полученная при коэффициенте демпфирования $\xi \geq 10$ % практически совпадает с кривой статического нелинейного анализа и существенно завышает несущую способность. При других значениях коэффициента вязкого демпфирования, кривые будут располагаться в интервале от $\xi = 0$ до $\xi \geq 10$ %.

В качестве промежуточного вывода, основанного на результатах представленных предварительных параметрических исследований, можно отметить, что метод энергетического баланса (ЕВМ) должен давать приемлемые результаты с погрешностью менее 10 % при оценке максимальной динамической реакции повреждённой конструктивной системы, поскольку коэффициенты демпфирования

в строительной инженерии редко превышают 5 % (см. СН 2.01.01 [19] и СН 2.01.04 [20]), коэффициенты жёсткости составляют около 10 %, а значения коэффициентов пластичности не превышают 4. В любом случае, результаты данного параметрического исследования следует интерпретировать с осторожностью, поскольку было сделано несколько важных упрощений. Кроме того, это исследование основано на предположении о чистом вязкостном демпфировании, которое почти наверняка не соответствует этим сценариям, особенно в случае проверок живучести сборных конструкций с т. н. «сухими» стыками. Вместе с тем, при анализе была сознательно использована модель вязкого демпфирования, наиболее широко применяемая в вычислительных комплексах, в частности SAP 2000.

2.5 Влияние скорости деформации на свойства материалов

В общем случае свойства материалов, из которых выполнены элементы конструкции, зависят от скорости приложения нагрузки (деформации). Ожидается, что материалы, подвергающиеся высокой скорости деформирования, будут вести себя иначе, чем при статическом нагружении. Последнее допущение метода энергетического баланса (ЕВМ) заключается в том, что *способность системы накапливать энергию деформации при заданном перемещении одинакова при статическом и динамическом нагружении*. Таким образом, метод энергетического баланса ЕВМ не учитывает напрямую эффекты, связанные со скоростью деформации.

На свойства строительных материалов скорости деформирования влияют по-разному. Более того, скорости деформирования не являются постоянными ни во времени, ни в пространстве и зависят от большого количества параметров. Таким образом, для общего сценария непросто оценить, влияют ли они на общую динамическую реакцию конструктивной системы и насколько велика скрытая ошибка, связанная с игнорированием их влияния.

Общеизвестно, что более высокие скорости деформации обычно повышают прочность и жёсткость типичных строительных материалов. Метод энергетического баланса (ЕВМ) игнорирует их влияние и обычно переоценивает максимальные динамические перемещения системы.

В последние годы были предложены различные эмпирические формулы, основанные на обширных экспериментальных исследованиях [18], связывающие скорость приложения нагрузки (деформации) со свойствами материала. Эти предложения были детально рассмотрены в нашей работе [13]. Таким образом, *их влияние можно напрямую включить в статическую реакцию системы с помощью законов, описывающих свойства материала*. Однако значения этих скоростей деформации необходимо рассчитывать для каждого конкретного случая отдельно.

Из решения, приведенного в работе [15] для конструкций, подвергающихся внезапному воздействию гравитационных нагрузок, скорость деформации обратно пропорциональна собственной частоте колебаний системы

$$\dot{\varepsilon} = -z_n \cdot \frac{Mg}{\Gamma K} \cdot \sqrt{\frac{K}{M}} \cdot \sin(\omega_1 t) = -\frac{gz_n}{\Gamma \omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t). \quad (8)$$

Если рассматривать конкретную точку конструкции, то Γ , z_n и g являются постоянными величинами, и поэтому из этого вывода следует, что *чем больше частота собственных колебаний, тем меньше будет скорость деформации*.

Следовательно, для неупругих систем с малыми жёсткостями и собственными частотами колебаний скорости деформации выше, чем для более жёстких упругих систем, и поэтому погрешность метода энергетического баланса (ЕВМ) для первых выше. Более того, эта погрешность также выше для нелинейных реакций, поскольку накопленная энергия деформации, которая прямо пропорциональна погрешности, возрастает при увеличении значений коэффициента пластичности.

Несмотря на то, что этот вывод не вполне применим для обобщённых конструкций, на скорость деформации которых влияют ещё и другие параметры, разумно предположить, что эта зависимость справедлива для реальных конструкций и что, тем не менее, существует связь между скоростью деформации и частотой собственных колебаний для сценариев внезапного удаления колонны.

Количественная оценка влияния скорости деформации на поведение конструктивных систем, подверженных мгновенному удалению колонны, была проведена в ходе исследований для разных материалов и конструктивных решений [5]. Для железобетонных каркасных конструкций недавно было опубликовано всестороннее исследование по этой проблеме [18]. Результаты этого исследования подтверждают гипотезу о том, что скорость деформации выше при неупругом поведении, но все же ниже по сравнению с другими высоко динамичными сценариями, такими как удары и взрывы. Это исследование показывает, что влияние скорости деформации может играть важную роль в реакции конструкции, *незначительно* повышая динамическую несущую способность здания.

Заключение

Метод энергетического баланса (ЕВМ) обеспечивает получение приближенных, но всё же достаточно точных результатов для оценки динамических реакций конструкций, подверженных внезапному удалению колонн, с помощью кривой динамической (квазидинамической) несущей способности, которая не требует сложных процедур для её построения на основе нелинейной статической реакции.

Результаты параметрических исследований упрощённых систем, представленные в настоящей статье, можно использовать для оценки порядка величины ошибок при расчёте максимальных динамических реакций с помощью метода энергетического баланса (ЕВМ) и, опираясь на мнение инженера, оценить, приводит ли такой подход к приемлемым результатам для конкретной конфигурации конструкции.

Основываясь на описанных допущениях и упрощениях, метод конечных элементов, при помощи которого получают нелинейную статическую, а далее и квазидинамическую реакцию, переоценивает динамические эффекты нагрузок (ступенчатую нагрузку, степень свободы, демпфирование), поэтому всегда приводит к консервативным результатам. Эта характеристика является важным преимуществом, поскольку конструктор, использующий этот подход, знает, что полученные результаты более критичны, чем те, которые конструк-

ция продемонстрирует в реальности. Таким образом, инженер, использующий метод конечных элементов, обеспечивает конструктивной системе необходимый запас. Кроме того, этот подход содержит меньше неопределённостей при выполнении расчётов из-за меньшего количества параметров, необходимых для анализа. В этом отношении метод энергетического баланса (ЕВМ) является многообещающим простым подходом с высоким потенциалом в качестве альтернативы другим сложным методам анализа сценариев внезапного удаления колонн.

Список цитированных источников

- Xu, G. Q. An energy-based partial pushdown analysis procedure for assessment of disproportionate collapse potential / G. Q. Xu, B. R. Ellingwood // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2011. – Vol. 67. – P. 547–555.
- Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss—Part I: Simplified assessment framework / B. A. Izzuddin, A. G. Vlassis, A. Y. Elghazouli, D. A. Nethercot // *Engineering Structures*. – 2008. – Vol. 30. – P. 1308–1318.
- Herraiz, B. Energy-based method for sudden column failure scenarios: Theoretical, numerical and experimental analysis / B. Herraiz, T. Vogel, J. Russell // *IABSE Workshop Helsinki 2015 : Safety, Robustness and Condition Assessment of Structures; International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE: Helsinki, Finland, 2015*. – P. 70–77.
- Bredow, R. Computer analysis of dynamic reliability of some concrete beam structure exhibiting random damping / R. Bredow, M. Kaminski // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2021. – Vol. 26, № 1. – P. 45–64.
- Quantification of model uncertainties of the energy-based method for dynamic column removal scenarios / L. Ding, Van R. Coile, W. Botte, R. Caspeele // *Engineering Structures*. – 2021. – Vol. 237. – P. 112057.
- Wang, C. H. Study on nonlinear damping behavior of damaged recycled aggregate concrete beams / C. H. Wang, J. Z. Xiao, C. F. Liang // *Structural Concrete*. – 2021. – Vol. 22. – P. 1429–1444. – DOI: 10.1002/suco.202000707.
- Charney, F. A. Unintended consequences of modeling damping in structures / F. A. Charney // *Journal of Structural Engineering*. – 2008. – Vol. 134. – P. 581–592.
- Hall, J. F. Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping / J. F. Hall // *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. – 2006. – Vol. 35. – P. 525–545.
- Hybrid Framework for Simulating Building Collapse and Ruin Scenarios Using Finite Element Method and Physics Engine / Z. Zheng, Y. Tian, Z. B. Yang, X. Z. Lu // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10. – P. 4408.
- Russell, J. M. Experimental investigation on the dynamic response of RC flat slabs after a sudden column loss / J. M. Russell, J. S. Owen, I. Hajirasouliha // *Engineering Structures*. – 2015. – Vol. 99. – P. 28–41.
- Rate effect on the stress–strain behavior of concrete under uniaxial tensile stress / X. Gao, L. Zhou, X. Ren, J. Li // *Structural Concrete*. – 2020. – Vol. 22. – E815–E830. – DOI: 10.1002/suco.201900567.
- Yung Tian. Dynamic Response of Reinforced Concrete Beams Following Instantaneous Removal of Bearing Column / Tian Yung, Su Youpo // *International Journal of Concrete Structures and Materials*. – 2011. – Vol 5, No. 1. – P. 19–28.
- Тур, А. В. Сопротивление изгибаемых железобетонных элементов при внезапном приложении нагрузки : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Андрей Викторович Тур ; Брест. гос. техн. ун-т. – Брест, 2012. – 225 с.
- Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях / В. И. Колчунов, Н. В. Ключева, Н. В. Андросова, А. С. Бухтиярова. – М. : ACB, 2014. – 208 с.
- Herraiz, B. Simplified approach for analysing building structures subjected to sudden column removal scenarios / B. Herraiz, T. Vogel // *In Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EUROSDYN 2014 Porto, Portugal, 30 June – 2 July 2014 / A. Cunha, E. Caetano, P. Ribeiro, G. Müller*. – Porto, 2014. – P. 3467–3474. – DOI: 10.3929/ethz-a-010261494.

16. Gomez, Borja H. Robustness of Flat Slabs Structures Subjected To a sudden Column Failure Scenario : dissertation : 23524 / Borja H. Gomez ; ETH Zurich, 2016.
17. Тамразян, А. Г. Концептуальные подходы к оценке живучести строительных конструкций, зданий и сооружений / А. Г. Тамразян // Железобетонные конструкции. – 2023. – Т. 3, № 3. – С. 62–74.
18. Живучесть зданий при особых воздействиях / В. И. Колчунов, В. В. Тур, Н. В. Федорова [и др.]. – М. : НИУ МГСУ, 2025. – 240 с.
19. Основы проектирования строительных конструкций : СН 2.01.01-2022. – Минск, 2022. – 65 с.
20. Бетонные и железобетонные конструкции : СП 5.03.01-2020. – Минск : Минстройархитектуры, 2020. – 123 с.
9. Hybrid Framework for Simulating Building Collapse and Ruin Scenarios Using Finite Element Method and Physics Engine / Z. Zheng, Y. Tian, Z. B. Yang, X. Z. Lu // Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10. – P. 4408.
10. Russell, J. M. Experimental investigation on the dynamic response of RC flat slabs after a sudden column loss / J. M. Russell, J. S. Owen, I. Hajirasouliha // Engineering Structures. – 2015. – Vol. 99. – P. 28–41.
11. Rate effect on the stress–strain behavior of concrete under uniaxial tensile stress / X. Gao, L. Zhou, X. Ren, J. Li // Structural Concrete. – 2020. – Vol. 22. – E815–E830. – DOI: 10.1002/suco.201900567.
12. Yung Tian. Dynamic Response of Reinforced Concrete Beams Following Instantaneous Removal of Bearing Column / Tian Yung, Su Youpo // International Journal of Concrete Structures and Materials. – 2011. – Vol 5, No. 1. – P.19–28.
13. Tur, A. V. Soprotivlenie izгибаемых железобетонных элементов при внезапном приложении нагрузки : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Андрей Викторович Тур ; Брест. гос. техн. ун-т. – Брест, 2012. – 225 с.
14. Zhivuchest' zdaniy i sooruzheniy pri zaproektnykh vozdeystviyakh / V. I. Kolchunov, N. V. Klyueva, N. V. Androsova, A. S. Buhtiyarova. – M. : ASV, 2014. – 208 s.
15. Herraiz, B. Simplified approach for analysing building structures subjected to sudden column removal scenarios / B. Herraiz, T. Vogel // In Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2014 Porto, Portugal, 30 June – 2 July 2014 / A. Cunha, E. Caetano, P. Ribeiro, G. Müller. – Porto, 2014. – P. 3467–3474. – DOI: 10.3929/ethz-a-010261494.
16. Gomez, Borja H. Robustness of Flat Slabs Structures Subjected To a sudden Column Failure Scenario : dissertation : 23524 / Borja H. Gomez ; ETH Zurich, 2016.
17. Tamrazyan, A. G. Konceptual'nye podhody k ocenke zhivuchesti stroitel'nykh konstrukcij, zdaniy i sooruzhenij / A. G. Tamrazyan // Zhelezobetonnye konstrukcii. – 2023. – Т. 3, № 3. – С. 62–74.
18. Zhivuchest' zdaniy pri osobym vozdeystviyakh / V. I. Kolchunov, V. V. Tur, N. V. Fedorova [i dr.]. – M. : NIU MGSU, 2025. – 240 s.
19. Osnovy proektirovaniya stroitel'nykh konstrukcij : SN 2.01.01-2022. – Minsk, 2022. – 65 s.
20. Betonnye i zhelezobetonnye konstrukcii : SP 5.03.01-2020. – Minsk : Minstrojarkhitektury, 2020. – 123 s.

References

1. Xu, G. Q. An energy-based partial pushdown analysis procedure for assessment of disproportionate collapse potential / G. Q. Xu, B. R. Ellingwood // Journal of Constructional Steel Research. – 2011. – Vol. 67. – P. 547–555.
2. Progressive collapse of multi-storey buildings due to sudden column loss—Part I: Simplified assessment framework / B. A. Izzuddin, A. G. Vlassis, A. Y. Elghazouli, D. A. Nethercot // Engineering Structures. – 2008. – Vol. 30. – P. 1308–1318.
3. Herraiz, B. Energy-based method for sudden column failure scenarios: Theoretical, numerical and experimental analysis / B. Herraiz, T. Vogel, J. Russell // IABSE Workshop Helsinki 2015 : Safety, Robustness and Condition Assessment of Structures; International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE: Helsinki, Finland, 2015. – P. 70–77.
4. Bredow, R. Computer analysis of dynamic reliability of some concrete beam structure exhibiting random damping / R. Bredow, M. Kaminski // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. – 2021. – Vol. 26, № 1. – P. 45–64.
5. Quantification of model uncertainties of the energy-based method for dynamic column removal scenarios / L. Ding, Van R. Coile, W. Botte, R. Caspeele // Engineering Structures. – 2021. – Vol. 237. – P. 112057.
6. Wang, C. H. Study on nonlinear damping behavior of damaged recycled aggregate concrete beams / C. H. Wang, J. Z. Xiao, C. F. Liang // Structural Concrete. – 2021. – Vol. 22. – P. 1429–1444. – DOI: 10.1002/suco.202000707.
7. Charney, F. A. Unintended consequences of modeling damping in structures / F. A. Charney // Journal of Structural Engineering. – 2008. – Vol. 134. – P. 581–592.
8. Hall, J. F. Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping / J. F. Hall // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. – 2006. – Vol. 35. – P. 525–545.

Материал поступил 25.08.2026, одобрен 25.08.2026, принят к публикации 25.08.2026