

МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 621.83+519.85

МЕТОД ОБРАТНОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПЛОСКОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

А. В. Котов¹, Д. Г. Кроль²

¹ Магистр технических наук, ведущий инженер-конструктор, АО «Сейсмотехника», аспирант кафедры механики, УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Гомель, Беларусь, e-mail: androskv@mail.ru

² К. ф.-м. н., доцент, первый проректор УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь, e-mail: kr-dmityr@gstu.by

Реферат

Представлен оригинальный метод обратного кинематического синтеза плоского рычажного механизма для решения задачи о воспроизведении заданной траектории движения точки с учетом функциональных ограничений. В отличие от классических подходов, требующих предварительного решения прямой задачи кинематики и формирования целевой функции на основе невязки координат траекторий, предлагаемый метод базируется непосредственно на решении обратной задачи кинематики. Кинематическое описание механизма выполняется для каждого заданного положения целевой точки без использования обобщенной координаты с применением метода преобразования координат в неизменном базисе на основе теории комплексных чисел. Благодаря такому подходу удается свести задачу синтеза к минимизации среднеквадратичного отклонения длины всего одного замыкающего звена (ведущего звена) во всех расчетных положениях, что значительно упрощает аналитическое описание и повышает наглядность процесса поиска оптимального решения.

Численная реализация предложенного метода выполнена в математическом пакете PTC MathCAD с использованием встроенной функции minimize(), реализующей квазиньютоновский метод поиска минимума. Для тестового примера воспроизведения траектории в форме эллипса, заданной десятью целевыми точками, получены оптимальные значения длин звеньев и координат неподвижных шарниров. Максимальная абсолютная погрешность отклонения расчетной траектории от заданных целевых точек не превысила 0,1 мм, относительная погрешность составила не более 1 %.

Полученные результаты подтверждают работоспособность и высокую точность предложенного метода, который может быть рекомендован для практического использования при проектировании новых или модернизации существующих рычажных механизмов в различных отраслях машиностроения.

Ключевые слова: рычажный механизм, кинематический синтез, траектория, алгоритм, ограничения.

METHOD OF INVERSE KINEMATIC SYNTHESIS OF A FLAT LEVER MECHANISM

A. V. Kotov, D. G. Krol

Abstract

An original method for the inverse kinematic synthesis of a flat lever mechanism is presented for solving the problem of reproducing a given trajectory of a point motion taking into account functional constraints. In contrast to classical approaches that require preliminary solution of the forward kinematics problem and the formulation of an objective function based on the residual of trajectory coordinates, the proposed method is based directly on solving the inverse kinematics problem. The kinematic description of the mechanism is performed for each specified position of the target point without using a generalized coordinate, applying the method of coordinate transformation in a fixed basis using complex number theory. Due to this approach, it is possible to reduce the synthesis problem to minimizing the root-mean-square deviation of the length of a single closing link (the driving link) in all calculated positions, which significantly simplifies the analytical description and increases the clarity of the optimal solution search process.

Numerical implementation of the proposed method is carried out in the mathematical package PTC MathCAD using the built-in minimize() function, which implements the quasi-Newton method for finding the minimum. For a test example of reproducing an elliptical trajectory defined by ten target points, optimal values of link lengths and coordinates of fixed pivots are obtained. The maximum absolute error of deviation of the calculated trajectory from the given target points did not exceed 0,1 mm, and the relative error was no more than 1 %.

The obtained results confirm the operability and high accuracy of the proposed method, which can be recommended for practical use in the design of new or modernization of existing lever mechanisms in various branches of mechanical engineering.

Keywords: lever mechanism, kinematic synthesis, trajectory, algorithm, constraints.

Введение

Кинематический синтез плоского рычажного механизма заключается в определении параметров его кинематической схемы по заданным условиям движения ведомого звена. Одной из разновидностей этой задачи является синтез механизма, воспроизводящего заданную траекторию движения определенного звена или точки [1]. Такие механизмы до сих пор остаются востребованными во многих отраслях машиностроения [2–4], а их оптимальное проектирование непосредственно связано с постановкой и решением задачи кинематического синтеза.

Несмотря на постоянное развитие и совершенствование методов кинематического синтеза плоских рычажных механизмов, не существует единого подхода к решению данной задачи. Известные графические методы [5] эффективны только для простейших

плоских рычажных механизмов и практически не применимы для многозвенных механизмов. Графоаналитические методы [6] кинематического синтеза разрабатываются под решение задач для конкретных рычажных механизмов и, как правило, не обладают высокой гибкостью в решении других задач. Известные аналитические методы [7–9] кинематического синтеза многозвенных рычажных механизмов в подавляющем большинстве достаточно сложны, громоздки и могут использовать оптимизационные алгоритмы, недоступные для подробного изучения. Поэтому разработка новых, наглядных и универсальных методов кинематического синтеза плоских рычажных механизмов, способных легко адаптироваться в специализированных математических пакетах и языках программирования, все еще представляет важную научную и практическую задачу.

Традиционно при решении задачи кинематического синтеза о воспроизведении заданной траектории движения точки плоского рычажного механизма предварительно решается прямая задача кинематики, по результатам которой формируется некоторая целевая функция. Как правило, в качестве такой целевой функции выступает невязка координат полученной расчетной траектории шатунной кривой некоторой точки с требуемой траекторией [10] или их среднеквадратичное отклонение [11]. Встречаются работы, в которых в качестве целевой функции выступает функция, учитывающая одновременно квадраты разниц между площадями описываемых областей, и длины желаемой и текущей траекторий [12]. Минимизация сформированной целевой функции достигается с помощью того или иного оптимизационного алгоритма за счет подбора рациональных длин подвижных звеньев, а в некоторых случаях и координат размеров стойки. Используемые для решения прямой задачи кинематики классические методы, в подавляющем большинстве основаны на методе замкнутых векторных контурах Зинovieва [13, 14] и требуют значительных математических выкладок. Но, как показывает практика [15] чем меньшее число аналитических выражений будет заложено в математическую модель механизма, тем более эффективно происходит поиск оптимального решения при его кинематическом синтезе.

В данной работе предлагается метод решения обратной задачи кинематики плоского рычажного механизма, используя непосредственно координаты целевых точек траектории для заданных расчетных положений. При этом минимальное число аналитических выражений достигается за счет применения метода преобразования координат в неизменном базисе с помощью теории комплексных чисел, а в качестве целевой функции предлагается использовать среднеквадратичное отклонение длины всего лишь одного из звеньев механизма. В результате такой постановке и решении задачи о воспроизведении заданной траектории движения точки получен эффективный метод с приемлемой точностью и скоростью поиска оптимального решения.

Целью данного исследования является разработка метода решения задачи о воспроизведении заданной траектории движения точки плоского рычажного механизма методом обратного кинематического синтеза с учетом наложенных функциональных ограничений. Компьютерная реализация предложенного метода представлена в математическом пакете PTC MathCAD.

Материалы и методы

Кинематический анализ плоского рычажного механизма основан на методе преобразования координат в неизменном базисе с помощью теории комплексных чисел. Решение задачи обратного кинематического синтеза осуществлено численным методом на основе встроенной функции *minimize()* математического пакета PTC MathCAD квазиьютоновским методом.

Метод обратного кинематического синтеза

Постановку и решение задачи предлагаемым методом обратного кинематического синтеза рассмотрим на примере плоского четырехзвенника, кинематическая схема которого, соответствующая одной из возможных сборок, приведена на рисунке 1. В качестве ведущего звена (кривошипа) выступает звено AC, а требуемая для воспроизведения траектория движения т. М задается координатами для *n*-го количества целевых точек на комплексной плоскости (в системе координат *Re-Im*).

При проведении кинематического синтеза в качестве оптимизируемых параметров выберем все длины звеньев механизма (кроме ведущего звена) и координаты неподвижных точек, которые представим в виде следующего вектора независимых оптимизируемых параметров:

$$\bar{p} = \{p_i\} = (A_x, A_y, B_x, B_y, L_{BD}, L_{MD}, L_{DC}, L_{MC})^T. \quad (1)$$

В общем случае заданная траектория движения т. М может представлять собой любую кривую. Для тестирования и отладки предложенного метода обратного кинематического синтеза примем, что для рассматриваемого плоского рычажного механизма требуемая для воспроизведения траектория движения т. М имеет форму

эллипса, большая ось которого параллельна действительной оси принятой системы координат, и задана с помощью следующих 10-ти целевых точек [16–18]:

$$M_i = \{(20; 10), (17,66; 15,142), (11,736; 17,878), (5; 16,928), (0,60307; 12,736), (0,60307; 7,2638), (5; 3,0718), (11,736; 2,1215), (17,66; 4,8577), (20; 10)\}.$$

Решение обратной задачи кинематики для рассматриваемого рычажного механизма будем проводить методом преобразования координат в неизменном базисе с применением теории комплексных чисел [19, 20]. Данный метод помимо своей простоты и наглядности обладает еще одним неоспоримым преимуществом – минимальным числом аналитических выражений, что, как отмечалось выше, является достаточно весомым аргументом при решении любой задачи кинематического синтеза.

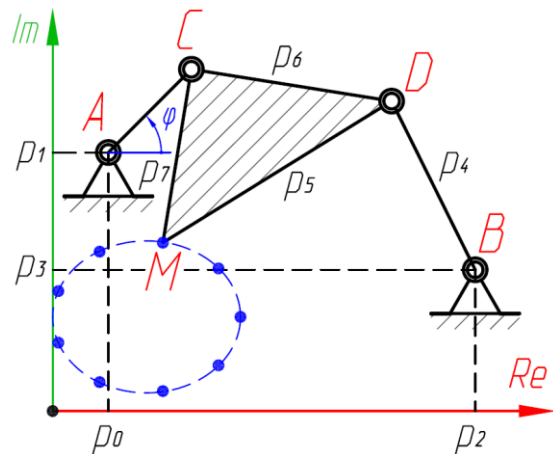


Рисунок 1 – Кинематическая схема плоского рычажного механизма

Используя приведенные в работах [19, 20] аналитические зависимости, а также вектор оптимизируемых параметров (1) опишем кинематику рассматриваемого рычажного механизма. Для этого представим промежуточные параметры расчетов (координаты точек, длины звеньев и др.) в виде радиус-вектора комплексного числа, для обозначения которого здесь и далее будет применяться символ нижнего подчеркивания. При этом при решении обратной задачи кинематики не будет использоваться какая-либо обобщенная координата, т. к. в аналитическом описании будут участвовать только *n* статических положений механизма.

Точки М, А и В:

$$\underline{M} = M_x + j \cdot M_y; \underline{A}(p) = p_0 + j \cdot p_1; \underline{B}(p) = p_2 + j \cdot p_3,$$

где *j* – мнимая единица.

Звено BM:

$$\underline{BM}(p) = \underline{M} - \underline{B}(p).$$

Угол *MBD* найдем по теореме косинусов с помощью пользовательской функции *Tcos()* [19, 20]:

$$\alpha_{MBD}(p) = Tcos(|\underline{BM}(p)|, p_4, p_5).$$

Вектор звена BD найдем с помощью пользовательской функции *TurnRI()* путем поворота найденного радиус-вектора звена BM на угол α_{MBD} по ходу часовой стрелки (перед углом стоит знак «–») с изменением его длины на оптимизируемую длину $p_4 \equiv L_{BD}$ [19, 20]:

$$\underline{BD}(p) = TurnRI(\underline{BM}(p), -\alpha_{MBD}(p), p_4).$$

Для краткости, приведем далее только расчетные формулы оставшихся параметров [19, 20]:

$$\underline{D}(p) = \underline{B}(p) + \underline{BD}(p); \underline{DM}(p) = \underline{M} - \underline{D}(p);$$

$$\alpha_{MDC}(p) = Tcos(p_5, p_6, p_7);$$

$$\underline{DC}(p) = TurnRI(\underline{DM}(p), -\alpha_{MDC}(p), p_6);$$

$$\underline{C}(p) = \underline{D}(p) + \underline{DC}(p); \underline{AC}(p) = \underline{C}(p) - \underline{A}(p); \underline{AB}(p) = \underline{B}(p) - \underline{A}(p).$$

В результате решена обратная задача кинематики рассматриваемого плоского рычажного механизма. При этом все найденные величины зависят от вектора оптимизируемых параметров и определяются для конкретного положения радиус-вектора t . M .

Дальнейшее решение задачи обратного кинематического синтеза заключается в формировании целевой функции, которая является центральным элементом при решении любой задачи синтеза. При решении рассматриваемой задачи в качестве целевой функции уже не может выступать невязка координат траекторий t . M , т. к. данная траектория была взята за основу при описании кинематики механизма. В предложенном методе обратного кинематического синтеза в качестве целевой функции будет выступать среднеквадратическое отклонение длины замыкающего звена AC во всех расчетных положениях:

$$f(\bar{p}) = \sigma(|\underline{AC}(\bar{p})|) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Такой подход к решению задачи кинематического синтеза сводится к минимизации целевой функции всего лишь одного звена (замыкающего), что делает решение задачи более простой и наглядной. Чем ближе к нулю в процессе кинематического синтеза будет получено значение целевой функции (2), тем более постоянную длину будет иметь замыкающее звено для всех рассматриваемых положений механизма, а, следовательно, будет обеспечено минимальное отклонение t . M от заданной траектории.

Стоит также отметить, что при решении обратной задачи кинематического анализа в качестве замыкающего звена для формирования целевой функции не обязательно должно выступать ведущее звено. В качестве замыкающего звена может быть выбрано любое другое звено, удобное для аналитического описания обратной задачи кинематики рассматриваемого механизма.

Для корректной работы сформированной целевой функции (2) необходимо наложить определенные функциональные ограничения на поиск решения задачи обратного кинематического синтеза. С этой целью все длины звеньев рассматриваемого механизма, а также координаты его неподвижных шарниров, используемые в векторе оптимизируемых параметров (1), ограничим определенным диапазоном поиска, который на практике, как правило, устанавливается исходя из определенных требований компоновки механизма. Данный диапазон поиска примем по аналогии с аналогичными механизмами, см. например [16–18], увеличив его на 12,5 % относительно принятых в них значений:

$$p_0, p_1, p_2, p_3 \in [-90, 90]; \quad p_4, p_5, p_6, p_7 \in (0, 90]. \quad (3)$$

Кроме того, обеспечим условие существования треугольника для жесткого звена MDC , согласно которому треугольник существует тогда и только тогда, когда сумма любых двух его сторон больше третьей стороны:

$$p_5 + p_6 > p_7; \quad p_6 + p_7 > p_5; \quad p_7 + p_5 > p_6. \quad (4)$$

Для обеспечения условия существования кривошипа для рассматриваемого четырехзвенника воспользуемся теоремой Грасгофа:

$$L_{AC}(\bar{p}) + |\underline{AB}(\bar{p})| < p_4 + p_6; \\ \min(L_{AC}(\bar{p}), |\underline{AB}(\bar{p})|, p_4, p_6) - L_{AC}(\bar{p}) = 0. \quad (5)$$

С помощью второго уравнения в выражении (5) определяется, что входное звено AC является наименьшим. При этом длина звена AC задается равной среднему значению во всех расчетных положениях:

$$L_{AC}(\bar{p}) = \text{mean}(|\underline{AC}(\bar{p})|). \quad (6)$$

После того, как сформирована целевая функция (2) и заданы функциональные ограничения (3)–(5), задача обратного кинематического синтеза механизма сводится к классическому поиску значений вектора оптимизируемых параметров (1), при которых она достигает минимума с приемлемым значением. Приемлемое значение минимума соответствует допустимым отклонениям длин звеньев и координат неподвижных шарниров, а, следовательно, приемлемой точности воспроизведения требуемой траектории движения t . M .

Поиск минимального значения целевой функции может осуществляться с помощью того или иного оптимизационного алгоритма (например, методом деформируемого многогранника [15], генетического [21] и др.) или с использованием специальных встроенных функций в математических пакетах или языках программирования. На сего-

дняшний день развитие численных методов и алгоритмов оптимизации с использованием современных математических пакетов и языков программирования позволяет на качественно новом уровне решать задачи кинематического синтеза плоских рычажных механизмов.

В данной работе численное решение обратной задачи кинематического синтеза будем проводить в математическом пакете PTC MathCAD при помощи встроенной функции *minimize* (f , var) [22]. Данная функция может осуществлять поиск экстремума целевой функции методом сопряженных градиентов или квазиньютоновским методом с приемлемой точностью и за короткое время. Программная реализация поиска минимума целевой функции в математическом пакете PTC MathCAD приведена на рисунке 2 и для простоты его описания разбита на пять условных блоков.

Сформированная целевая функция и средняя длина замыкающего звена:

$$f(p) := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (|AC(M_i, p)| - L_{AC}(p))^2} \quad L_{AC}(p) := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |AC(M_i, p)| \quad (1)$$

Начальное приближение вектора оптимизируемых параметров, мм:

$$p := (-5 \quad 15 \quad 35 \quad 5 \quad 15 \quad 25 \quad 20 \quad 15)^T \quad (2)$$

Поиск решения:

Given
область допустимых значений параметров:

$-90 \leq p_0 \leq 90$	- координата $t.A$ по X , мм	Условие существования кривошипа:
$-90 \leq p_1 \leq 90$	- координата $t.A$ по Y , мм	
$-90 \leq p_2 \leq 90$	- координата $t.B$ по X , мм	
$-90 \leq p_3 \leq 90$	- координата $t.B$ по Y , мм	Условие существования треугольника:
$0 < p_4 \leq 90$	- длина звена L_{MD} , мм	
$0 < p_5 \leq 90$	- длина звена L_{MD} , мм	
$0 < p_6 \leq 90$	- длина звена L_{DC} , мм	
$0 < p_7 \leq 90$	- длина звена L_{MC} , мм	

$$L_{AC}(p) + |AB(p)| < p_4 + p_6$$

$$\min(L_{AC}(p), |AB(p)|, p_4, p_6) - L_{AC}(p) = 0$$

$$(p_5 + p_6) > p_7$$

$$(p_6 + p_7) > p_5$$

$$(p_7 + p_5) > p_6$$

Найденное решение задачи обратного кинематического синтеза, мм:

$$P_{mcd} := \text{Minimize}(f, p)$$

$$P_{mcd}^T = (7.015 \quad 13.371 \quad 48.92 \quad 2.73 \quad 24.313 \quad 25.806 \quad 27.843 \quad 4.905)$$

Проверка условия выполнения ограничений, а также значение целевой функции, мм:

$$L_{AC}(P_{mcd}) + |AB(P_{mcd})| - P_{mcd_4} - P_{mcd_6} = -7.584 \times 10^{-5} \quad \text{— выполнено}$$

$$\min(L_{AC}(P_{mcd}), |AB(P_{mcd})|, P_{mcd_4}, P_{mcd_6}) - L_{AC}(P_{mcd}) = 0 \quad \text{— выполнено}$$

$$f(P_{mcd}) = 0.036 \quad L_{AC}(P_{mcd}) = 8.92$$

(3)

Рисунок 2 – Программная реализация минимизации целевой функции в математическом пакете PTC MathCAD

В первом блоке задана целевая функция и средняя длина замыкающего звена, которые были рассчитаны для всех заданных положений. Во втором блоке для корректной работы алгоритма записано начальное приближение для всех величин вектора оптимизируемых параметров. В третьем блоке в виде системы неравенств задаются области допустимых значений изменения оптимизируемых параметров (левая часть блока), а также принятые функциональные ограничения (правая часть блока). В четвертом блоке решается сама задача обратного кинематического синтеза, учитывая все заданные выше функциональные ограничения, с окончательным выводом найденных результатов синтеза. В пятом блоке проверяется выполнение всех заданных функциональных ограничений, а также выводятся значения целевой функции и длины замыкающего звена для найденных оптимальных кинематических параметров механизма.

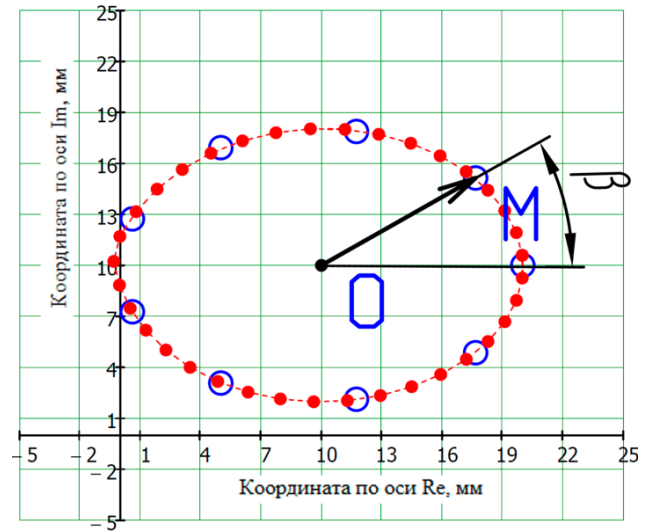
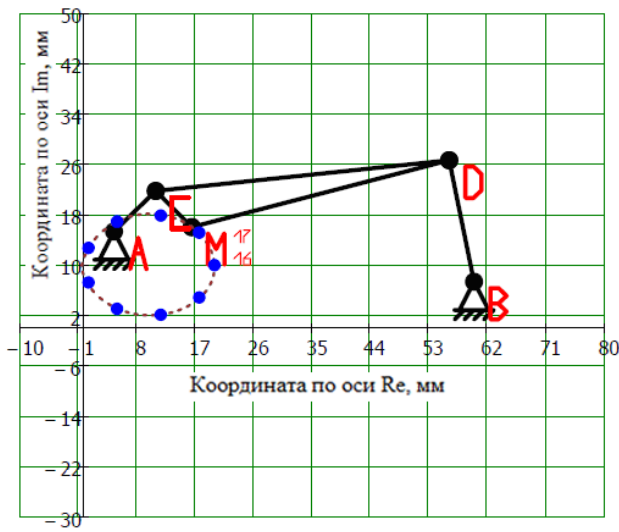
Результаты исследования

В результате решения задачи обратного кинематического синтеза были получены значения вектора оптимизируемых параметров и среднего значения длины замыкающего звена AC (см. рисунок 2). С помощью данных величин проведено уточнение итоговой траектории t . M путем проведения повторного кинематического анализа, но уже в прямом порядке с использованием обобщенной координаты (угла поворота φ ведущего звена) [19, 20]:

$$(A_X, A_Y, B_X, B_Y, L_{BD}, L_{MD}, L_{DC}, L_{MC})^T = \bar{p}_{mcd}; \quad L_{AC} = L_{AC}(\bar{p}_{mcd}); \\ A = A_X + jA_Y; \quad B = B_X + jB_Y; \quad AC(\varphi) = \text{TurnRI}(e_{Re}, \varphi, L_{AC}); \\ C(\varphi) = A + AC(\varphi); \quad BC(\varphi) = C(\varphi) - B; \\ \alpha_{CBD}(\varphi) = \text{Tcos}(|BC(\varphi)|, L_{BD}, L_{DC}); \\ BD(\varphi) = \text{TurnRI}(BC(\varphi), -\alpha_{CBD}(\varphi), L_{BD});$$

$$\begin{aligned} \underline{D}(\varphi) &= \underline{B} + \underline{BD}(\varphi); \quad \underline{CD}(\varphi) = \underline{D}(\varphi) - \underline{C}(\varphi); \\ \alpha_{DCM} &= T\cos(L_{DC}, L_{MC}, L_{MD}); \quad \underline{CM}(\varphi) = \text{TurnRI}(\underline{CD}(\varphi), -\alpha_{DCM}, L_{MC}); \\ \underline{M}'(\varphi) &= \underline{C}(\varphi) + \underline{CM}(\varphi). \end{aligned}$$

На рисунке 3, а представлена визуализация в математическом пакете PTC MathCAD кинематической схемы синтезированного механизма [23, 24], а на рисунке 3, б – график полученной траектории движения т. M' , проходящей через заданные целевые точки.



а – кинематическая схемы синтезированного механизма; б – траектория движения т. M'

Рисунок 3 – Визуализация в математическом пакете PTC MathCAD кинематической схемы синтезированного плоского рычажного механизма и траектории движения т. M'

Оценку погрешности отклонения полученной траектории движения т. M' от заданных целевых точек будем проводить с помощью радиус-векторов. За отчетную точку радиус-вектора, т. O , примем центр тяжести плоской фигуры (эллипс, см. рисунок 3, б), ограниченной заданными точками, и определяемую с помощью выражения:

$$\underline{O} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{M}_i.$$

Сравниваемые радиус-векторы $\underline{OM}_i$ (исходные данные) и $\underline{OM}^*$ (расчетные данные) получим по формулам:

$$\underline{OM}_i = \underline{M}_i - \underline{O}; \quad \underline{OM}^*(\varphi) = \underline{M}'(\varphi) - \underline{O}. \quad (7)$$

Здесь необходимо отметить, что для корректного сравнения между собой радиус-векторы (7) должны иметь одинаковый угол наклона к действительной оси комплексной плоскости, который можно найти из аргумента соответствующего вектора комплексного числа:

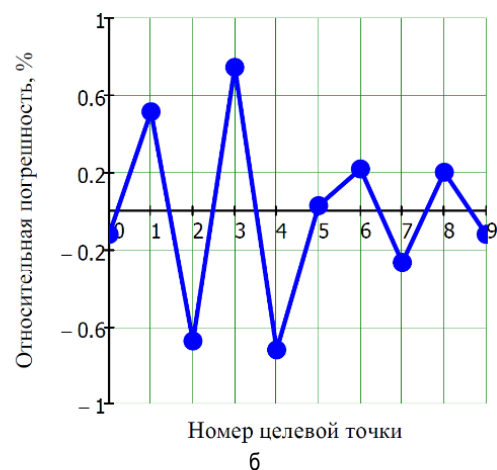
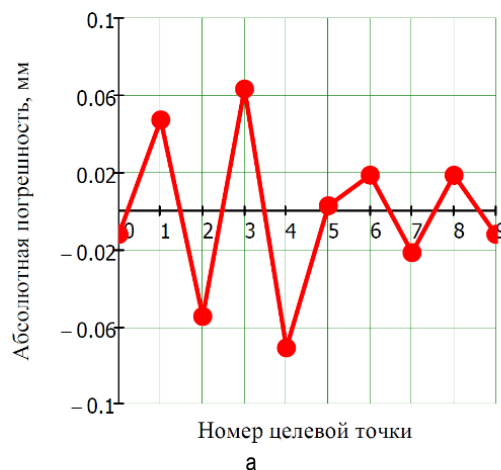
$$\beta_i = \arg(\underline{OM}_i).$$

Тогда абсолютную и относительную погрешность отклонения полученной траектории движения т. M' в заданных целевых точках вычислим как

$$\Delta_i = |\underline{OM}_i| - |\underline{OM}^*(\varphi(\beta_i))|; \quad \delta_i = \frac{\Delta_i}{|\underline{OM}^*(\varphi(\beta_i))|}.$$

Графики рассчитанных абсолютных и относительных погрешностей в каждой целевой точке траектории движения т. M приведены на рисунке 4.

Как видно из полученных результатов расчета, максимальная абсолютная погрешность отклонения траектории т. M' в контрольных точках не превышает в абсолютных величинах 0,1 мм или 1 % в относительных величинах. Это говорит о достаточно высокой точности рассчитанных величин вектора оптимизируемых параметров, а также подтверждает правильность постановки и решения полученной задачи обратного кинематического синтеза.



а – график абсолютной погрешности; б – график относительной погрешности

Рисунок 4 – Графики изменения абсолютной и относительной погрешности в целевых точках траектории движения т. M

Заключение

Предложенный способ обратного кинематического синтеза плоского рычажного механизма позволил обеспечить приближенное воспроизведение заданной траектории движения точки механизма с достаточно высокой точностью (расчетная погрешность в целевых точках не превысила 1 % в относительных единицах). В основе предложенного метода лежит решение обратной задачи кинематического синтеза с последующим формированием целевой функции в виде среднеквадратичного отклонения длины одного замыкающего звена.

Данный способ показал высокую адаптацию в математическом пакете PTC MathCAD, однако точность метода будет всецело зависеть от возможностей используемого оптимизационного алгоритма, способного находить глобальный минимум целевой функции с учетом наложенных ограничений.

Результаты работы могут быть использованы на практике при проектировании новых или модернизации существующих рычажных механизмов в различных отраслях машиностроения.

Список цитированных источников

1. Артоболевский, И. И. Теория механизма и машин: учебник / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. / Репринтное воспроизведение издания 1988 г. – М.: Транспортная компания, 2023. – 640 с.
2. Кикин, А. А. Оптимизационный синтез шестизвенных направляющих механизмов для машин легкой промышленности: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.18 / Антон Андреевич Кикин. – СПб., 2010. – 150 с.
3. Халтурин, М. А. Синтез прямолинейно-направляющего механизма для отрезки заготовок эскимо / М. А. Халтурин // Вестник ВоГУ. Серия: Технические науки. – 2019. – № 1(3). – С. 27–34.
4. Зыкова, Е. П. Практическое применение кривошипно-коромыслового прямилы Чебышева / Е. П. Зыкова, Р. М. Мухтарбекова // World science: problems and innovations: сборник статей LXV Междунар. науч.-практ. конф., Пенза, 30 мая 2022 г. – Пенза: Наука и Просвещение, 2022. – С. 28–32.
5. Сункуев, Б. С. Синтез механизмов: учеб. пособие / Б. С. Сункуев. – Витебск: ВГТУ, 2001. – 84 с.
6. Артоболевский, И. И. Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М.: Физматгиз, 1959. – 1084 с.
7. Гебель, Е. С. Математическая модель аппроксимационного синтеза рычажных механизмов / Е. С. Гебель, Б. И. Журсенбаев // Развитие дорожно-транспортного комплекса и строительной инфраструктуры на основе рационального природопользования: материалы VII Всеросс. науч.-практ. конф. ФГБОУ ВПО «СибАДИ» (с международным участием), Омск, 26–27 апр. 2012 г. – Омск: СибАДИ, 2012. – Кн. 2. – С. 132–138.
8. Кінематичний синтез механізму регулювання форми стрічки конвеєра / В. Р. Пасіка, П. С. Коруняк, П. Л. Носко [та ін.] // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення у сучасних технологіях. – 2018. – № 45 (1321). – С. 47–58. – DOI: 10.20998/2413-4295.2018.45.07.
9. Халтурин, М. А. Синтез шарнирного четырехзвенного механизма конвейера с прерывистым движением тяговых цепей / М. А. Халтурин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2018. – № 4 (121). – С. 92–108. – DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-92-108.
10. Бейсенов, Н. К. Оптимизационно-метрический синтез шарнирного четырехзвенника / Н. К. Бейсенов // Технические науки – от теории к практике. – 2016. – № 55. – С. 65–77.
11. Люминарский, С. Е. Метрический синтез кривошипно-ползунного механизма / С. Е. Люминарский, И. Е. Люминарский // Альманах современной науки и образования. – 2017. – № 2 (116). – С. 80–86.
12. Борисов, И. И. Разработка метода геометрического синтеза и параметрической оптимизации механизма ноги галопирующего робота / И. И. Борисов, Д. С. Монич, С. А. Колюбин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2019. – Т. 19, № 5. – С. 832–839. – DOI: 10.17586/2226-1494-2019-19-5-832-839.
13. Куцополенко, А. В. Геометрический анализ шарнирного механизма центробежного ограничителя скорости лифта с двумя выходными звеньями / А. В. Куцополенко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2024. – № 4 (69). – С. 61–69. – DOI: 10.46864/1995-0470-2024-4-69-61-69.
14. Кинематический и силовой анализ механизма привода двухстанной очистки зерноуборочного комбайна / Д. А. Дубовик, В. И. Прибыльский, А. А. Новиков, А. Н. Вырский // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2019. – № 6. – С. 78–90. – DOI: 10.1134/S023571191906004X.
15. Котов, А. В. Оценка возможности применения метода деформируемого многогранника к задаче оптимизационного кинематического синтеза плоского рычажного механизма / А. В. Котов, Д. Г. Кроль // Механика. Исследования и инновации. – 2025. – № 18. – С. 81–89.
16. An evolutionary algorithm for path synthesis of mechanisms / J. A. Cabrera, A. Ortiz, F. Nadal, J. Castillo // Mechanism and Machine Theory. – 2011. – Vol. 46. – P. 127–141. – DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.10.003.
17. A new approach for the optimal synthesis of four-bar path generator linkages / N. N. Romero, A. Campos, D. Martins, R. S. Vieira // Applied Sciences. Springer Science and Business Media LLC. – 2019. – Vol. 1. – P. 1504. – DOI: 10.1007/s42452-019-1511-3.
18. Optimum Synthesis of Four-Bar Mechanism by Using Relative Angle Method: A Comparative Performance Study / L. E. Valencia-Segura, M. G. Villarreal-Cervantes, L. G. Corona-Ramirez [et al.] // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 132990–133010. – DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3115444.
19. Котов, А. В. Исследование эксплуатационных характеристик механизма агрегатирования самоходной уборочной косилки методом математического моделирования / А. В. Котов, Д. Г. Кроль // Научно-технический прогресс в сельскохозяйственном производстве: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 16–17 окт. 2025 г. / редкол.: П. П. Казакевич [и др.] – Минск: Беларуская навука, 2025. – С. 120–125.
20. Котов, А. В. Кинематический и силовой анализ механизма подъема наклонной камеры зерноуборочного комбайна с применением теории комплексных чисел / А. В. Котов, Д. Г. Кроль // Конструирование, использование и надежность машин сельскохозяйственного назначения: сборник научных работ. – 2025. – № 1 (24). – С. 40–48.
21. Гальченко, В. Я. MathCAD: математические методы и инструментальные средства оптимизации / В. Я. Гальченко, Р. В. Трембовецкая. – Черкассы: ЧП Гордиенко Е. И., 2018. – 516 с.
22. Орловский, Б. В. Метрический синтез обернутого кулисного механизма ниткопритягивача швейной машины. Повідомлення 2 / Б. В. Орловський, В. М. Дворжак, Є. С. Радченко // Технології та дизайн. – 2012. – № 1. – С. 1–9.
23. Котов, А. В. Способ графического отображения математических моделей плоских рычажных механизмов с помощью матриц однородного преобразования / А. В. Котов // XIX Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24 октября 2025 г.: в 2 т. / редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.] – Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2025. – Т. 1. – С. 25–28.
24. Котов, А. В. Способ визуализации решения кинематических задач для плоских рычажных механизмов сельскохозяйственных машин с помощью матриц однородного преобразования координат / А. В. Котов, Д. Г. Кроль // Инновационные технологии в агропромышленном комплексе – сегодня и завтра: сб. науч. статей 9-й междунар. науч.-практ. конф.: в 2 ч., Гомель, 5 нояб. 2025 г. / Гомсельмаш. – Гомель, 2025. – Ч. 1. – С. 131–136.

References

1. Artobolevskij, I. I. Teoriya mekhanizma i mashin: uchebnik / I. I. Artobolevskij. – 4-e izd., pererab. i dop. / Reprintnoe vosproizvedenie izdaniya 1988 g. – M.: Transportnaya kompaniya, 2023. – 640 s.

2. Kikin, A. A. Optimizatsionnyy sintez shestizvennykh napravlyayushchikh mekhanizmov dlya mashin legkoj promyshlennosti : dis. ... kand. tekhn. nauk : 05.02.18 / Anton Andreevich Kikin. – SPb., 2010. – 150 s.
3. Halturin, M. A. Sintez pryamolinejno-napravlyayushchego mekhanizma dlya otrezki zagotovok eskimo / M. A. Halturin // Vestnik VoGU. Seriya: Tekhnicheskie nauki. – 2019. – № 1(3). – S. 27–34.
4. Zykova, E. P. Prakticheskoe primeneniye krivoshipno-koromyslovogo pryamila Chebysheva / E. P. Zykova, R. M. Muhtarbekova // World science: problems and innovations : sbornik statej LXV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Penza, 30 maya 2022 g. – Penza : Nauka i Prosveshchenie, 2022. – S. 28–32.
5. Sunkuev, B. S. Sintez mekhanizmov: ucheb. posobie / B. S. Sunkuev. – Vitebsk : VGTU, 2001. – 84 s.
6. Artobolevskij, I. I. Sintez ploskih mekhanizmov / I. I. Artobolevskij, N. I. Levitskij, S. A. Cherkudinov. – M. : Fizmatgiz, 1959. – 1084 s.
7. Gebel', E. S. Matematicheskaya model' approksimatsionnogo sinteza rychaznykh mekhanizmov / E. S. Gebel', B. I. Zhursenbaev // Razvitie dorozhno-transportnogo kompleksa i stroitel'noj infrastruktury na osnove racional'nogo prirodopol'zovaniya : materialy VII Vseross. nauch.-prakt. konf. FGBOU VPO «SibADI» (s mezhdunarodnym uchastiem), Omsk, 26–27 apr. 2012 g. – Omsk : SibADI, 2012. – Kn. 2. – S. 132–138.
8. Kinematichnij sintez mekhanizmu reguliruyannyya formi strichki konveera / V. R. Pasika, P. S. Korunyak, P. L. Nosko [ta in.] // Visnik NTU «HP». Seriya: Novi rishennya u suchasniy tekhnologiyah. – 2018. – № 45 (1321). – S. 47–58. – DOI: 10.20998/2413-4295.2018.45.07.
9. Halturin, M. A. Sintez sharnirnogo chetyrehzvennogo mekhanizma konveera s preryvistym dvizheniem tyagovykh cepej / M. A. Halturin // Vestnik MGU im. N. E. Baumana. Seriya Mashinostroenie. – 2018. – № 4 (121). – S. 92–108. – DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-92-108.
10. Bejsenov, N. K. Optimizatsionno-metricheskij sintez sharnirnogo chetyrehzvennika / N. K. Bejsenov // Tekhnicheskie nauki – ot teorii k praktike. – 2016. – № 55. – S. 65–77.
11. Lyuminarskij, S. E. Metricheskij sintez krivoshipno-polzunnogo mekhanizma / S. E. Lyuminarskij, I. E. Lyuminarskij // Al'manah sovremennoj nauki i obrazovaniya. – 2017. – № 2 (116). – S. 80–86.
12. Borisov, I. I. Razrabotka metoda geometricheskogo sinteza i parametricheskoj optimizatsii mekhanizma nogi galopiruyushchego robota / I. I. Borisov, D. S. Monich, S. A. Kolyubin // Nauchno-tekhnicheskij vestnik informatsionnykh tekhnologij, mekhaniki i optiki. – 2019. – T. 19, № 5. – S. 832–839. – DOI: 10.17586/2226-1494-2019-19-5-832-839.
13. Kucepolenko, A. V. Geometricheskij analiz sharnirnogo mekhanizma centrobezhnogo ograničitelya skorosti lifta s dvumya vyhodnymi zven'yami / A. V. Kucepolenko // Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov. – 2024. – № 4 (69). – S. 61–69. – DOI: 10.46864/1995-0470-2024-4-69-61-69.
14. Kinematicheskij i silovoj analiz mekhanizma privoda dvuhstannojo ochistki zemouborochnogo kombajna / D. A. Dubovik, V. I. Pribyl'skij, A. A. Novikov, A. N. Vyrskij // Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. – 2019. – № 6. – S. 78–90. – DOI: 10.1134/S023571191906004X.
15. Kotov, A. V. Ocenka vozmozhnosti primeneniya metoda deformiruemogo mnogogrannika k zadache optimizatsionnogo kinematicheskogo sinteza ploskogo rychaznogo mekhanizma / A. V. Kotov, D. G. Krol' // Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii. – 2025. – № 18. – S. 81–89.
16. An evolutionary algorithm for path synthesis of mechanisms / J. A. Cabrera, A. Ortiz, F. Nadal, J. Castillo // Mechanism and Machine Theory. – 2011. – Vol. 46. – P. 127–141. – DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.10.003.
17. A new approach for the optimal synthesis of four-bar path generator linkages / N. N. Romero, A. Campos, D. Martins, R. S. Vieira // Applied Sciences. Springer Science and Business Media LLC. – 2019. – Vol. 1. – P. 1504. – DOI: 10.1007/s42452-019-1511-3.
18. Optimum Synthesis of Four-Bar Mechanism by Using Relative Angle Method: A Comparative Performance Study / L. E. Valencia-Segura, M. G. Villarreal-Cervantes, L. G. Corona-Ramirez [et al.] // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 132990–133010. – DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3115444.
19. Kotov, A. V. Issledovanie ekspluatatsionnykharakteristik mekhanizma agregirovaniya samohodnoj uborochnoj kosilki metodom matematicheskogo modelirovaniya / A. V. Kotov, D. G. Krol' // Nauchno-tekhnicheskij progress v sel'skohozyajstvennom proizvodstve : materialy Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Minsk, 16–17 okt. 2025 g. / redkol.: P. P. Kazakevich [i dr.] – Minsk : Belaruskaya navuka, 2025. – S. 120–125.
20. Kotov, A. V. Kinematicheskij i silovoj analiz mekhanizma pod"ema naklonnoj kamery zemouborochnogo kombajna s primeneniem teorii kompleksnykh chisel / A. V. Kotov, D. G. Krol' // Konstruirovaniye, ispol'zovanie i nadezhnost' mashin sel'skohozyajstvennogo naznacheniya : sbornik nauchnykh rabot. – 2025. – № 1 (24). – S. 40–48.
21. Gal'chenko, V. YA. MathCAD: matematicheskie metody i instrumental'nye sredstva optimizatsii / V. YA. Gal'chenko, R. V. Tremboveckaya. – Cherkassy : CHP Gordienko E. I., 2018. – 516 s.
22. Orlovskij, B. V. Metrichnij sintez obremenogo kulisnogo mekhanizmu nitkoprit'yaguvacha shvejnoj mashini. Povidomlennyya 2 / B. V. Orlovskij, V. M. Dvorzhak, E. S. Radchenko // Tekhnologii ta dizajn. – 2012. – № 1. – S. 1–9.
23. Kotov, A. V. Sposob graficheskogo otobrazheniya matematicheskikh modelej ploskih rychaznykh mekhanizmov s pomoshch'yu matric odnorodnogo preobrazovaniya / A. V. Kotov // XIX Masherovskie chteniya : materialy mezhdunar. nauch.-prakt. konf. studentov, aspirantov i molodykh uchenykh, Vitebsk, 24 oktyabrya 2025 g. : v 2 t. / redkol.: E. YA. Arshanskij (gl. red.) [i dr.] – Vitebsk : VGU im. P. M. Masherova, 2025. – T. 1. – S. 25–28.
24. Kotov, A. V. Sposob vizualizatsii resheniya kinematicheskikh zadach dlya ploskih rychaznykh mekhanizmov sel'skohozyajstvennykh mashin s pomoshch'yu matric odnorodnogo preobrazovaniya koordinat / A. V. Kotov, D. G. Krol' // Innovatsionnye tekhnologii v agropromyshlennom komplekse – segodnya i zavtra : sb. nauch. statej 9-j mezhdunar. nauch.-prakt. konf.: v 2 ch., Gomel', 5 noyab. 2025 g. / Gomsel'mash. – Gomel', 2025. – CH. 1. – S. 131–136.

Материал поступил 05.06.2026, одобрен 01.07.2026,
принят к публикации 06.07.2026