

УДК 534.1+539.3+539.4

ОСОБЕННОСТИ КОЛЕБАНИЙ ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВИДА РЕОЛОГИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

Б. Г. Холодарь

*К. т. н., доцент, старший научный сотрудник НИЧ, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь,
e-mail: hbg@list.ru*

Реферат

Конструкционные материалы проявляют сложный комплекс механических свойств, зависящий от условий их эксплуатации (температура, характер нагружения, длительность воздействия и др.). Для их отражения используются подходы, основанные как на современных представлениях физики материалов, так и на известных реологических моделях Максвелла, Кельвина, Фойгта с постоянной вязкостью, не зависящей от изменений напряженно-деформированного состояния материала, что позволяет получать аналитические решения прикладных задач и прогнозировать особенности поведения конструкций. Усовершенствования моделей с учетом трансформации структуры материалов при нагружении вызывают необходимость численных решений, что вносит соответствующие затруднения в анализ и обобщения. В настоящей работе рассматривается задача о продольных колебаниях механических систем в виде массы на стержневой связи, свойства которой подчиняются упомянутым моделям, при действии гармонической нагрузки. Существенные различия в поведении систем наблюдаются в дорезонансной зоне частот нагружения. Результаты решения визуализированы в виде графиков коэффициентов динамичности для деформаций и напряжений как в установившемся процессе вынужденных колебаний, так и для начального периода движения, в течение которого напряжения и деформации достигают своих максимальных значений. Построены траектории, показывающие переход во времени напряжений и деформаций к установившимся уровням при варьировании параметров системы. Приведенные результаты могут быть полезны как для учебных целей, так и в научно-технических приложениях.

Ключевые слова: механические колебания, реономные материалы, структурные модели, гармоническое нагружение, полные и вынужденные деформации и напряжения, коэффициент динамичности.

FEATURES OF OSCILLATIONS OF A SINGLE-MASS SYSTEM DEPENDING ON THE TYPE OF RHEOLOGICAL LINK

B. G. Kholodar

Abstract

Structural materials exhibit a complex set of mechanical properties that depend on the conditions of their use (temperature, type of loading, duration of exposure, etc.). These are modeled using approaches based on both modern concepts of materials physics and well-known rheological models (Maxwell, Kelvin, Voigt) with constant viscosity independent of changes in the stress-strain state of the material. This allows for analytical solutions to practical problems and the prediction of structural behavior. Improvements to models that take into account the transformation of material structure under loading require numerical solutions, which introduces corresponding difficulties in analysis and generalizations. This paper examines the problem of longitudinal vibrations of mechanical systems in the form of a mass on a rod connection, the properties of which are subject to the aforementioned models, under the action of a harmonic load. Significant differences in system behavior are observed in the pre-resonance frequency range of loading. The results of the analysis are visualized in the form of graphs of dynamic coefficients for deformations and stresses both in the steady-state process of forced vibrations and for the initial period of motion during which stresses and deformations reach their maximum values. Trajectories showing the time-dependent transition of stresses and deformations to steady-state levels with variation of system parameters are constructed. The presented results can be useful both for educational purposes and in scientific and technical applications.

Keywords: mechanical vibrations, rheonomic materials, structural models, harmonic loading, total and forced deformations and stresses, dynamic coefficient.

1 Введение

Конструкционные материалы обладают сложным набором механических свойств, проявление которых зависит от условий нагружения, в первую очередь таких как температура, уровень, скорость и длительность воздействия. В возникающей при силовых воздействиях деформации ε выделяют в качестве составляющих упругую (мгновенно-обратимую) ε_y , пластическую (остаточную) ε_n и возвратную (запаздывающе-обратимую) ε_v компоненты деформаций: $\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_n + \varepsilon_v$.

Для установления связи между компонентами полной деформации и их скоростями используются структурные модели, состоящие из упругих и вязких элементов и позволяющие устанавливать взаимосвязь между указанными деформациями во времени.

В модели упругого тела имеет место однозначная зависимость напряжений σ и деформаций ε , в других моделях скорости остаточных и возвратных деформаций зависят от уровня напряжений и деформаций и соответствующей вязкости материала. На рисунке 1

показаны модель Максвелла, применяемая для описания упруго-пластического деформирования, модель Фойгта, описывающая материал с последствием без наличия остаточных деформаций, и модель Кельвина обобщенного твердого тела, позволяющая описать связь напряжений с упругими, остаточными и возвратными деформациями. Указанные модели учитывают рассеяние энергии вязкими элементами и наряду с моделью упругого тела позволяют в той или иной мере отразить известные из опыта эффекты поведения материалов в различных режимах нагружения. Модель Кельвина сравнительно с другими показывает наиболее полное соответствие экспериментальным данным [1, 2]. Данные модели широко используются в технических приложениях, медицине, биологии [3–6]. Модель Фойгта, в которой внутреннее демпфирование в материале связывается только со скоростью деформирования, в наименьшей степени соответствует реальным материалам [1] и более пригодна для описания демпфирования гидравлическими (поршневыми) амортизаторами при умеренных скоростях движения.

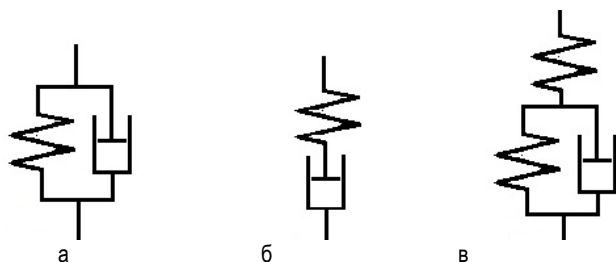


Рисунок 1 – Модели Фойгта (а), Максвелла (б), Кельвина (в)

Соответствующие уравнения, описывающие свойства материалов по указанным моделям, для одномерного случая имеют вид (здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по времени):

$$(a) \sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}; \quad (b) \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma'}{E} + \frac{\sigma}{\eta}; \quad (c) \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma'}{E} + \frac{\sigma - E\varepsilon}{\eta}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости, $E\varepsilon = E \cdot E^*/(E + E^*)$ – равновесный (длительный) модуль, E^* – равновесный модуль возвратных деформаций, η – вязкость материала. Вязкости в моделях, определяющие демпфирование, являются величинами феноменологическими, и для материалов сложной структуры (в частности, металлов) их строгое физическое обоснование затруднительно ввиду многочисленности механизмов, вызывающих рассеяние энергии в процессе деформирования.

Если параметры E , E^* , η приняты как некоторые константы, то уравнения являются линейными, и их достоинством является возможность построения аналитических решений для основных случаев нагружения. Уточнение описания фактического поведения материалов на соответствующем отрезке времени при заданном режиме нагружения достигается включением в модель дополнительных вязких элементов или непосредственно элементов Фойгта, что соответственно повышает порядок уравнений. Принципиальные особенности поведения материалов, отражаемые с помощью уравнений такого вида, рассмотрены в [1, 2]. Недостатком линейных моделей является отсутствие учета трансформации структуры материала в процессе деформирования, что не позволяет им адекватно отразить некоторые наблюдаемые экспериментальные факты. Примеры соответствующих усложнений моделей деформированного твердого тела и их использования известны [7–13]. Поведение упруго-пластического материала с вязкостью, характеристики которой прямо связаны с формой диаграммы растяжения при стандартных испытаниях образцов, рассмотрено в [14] для различных режимов нагружения. Результаты применения такого подхода показывают их соответствие опытным данным.

В данной работе на примере задачи о колебаниях одномассовой системы при циклическом нагружении рассматриваются в линейной постановке отличия в напряженно-деформированном состоянии материала связи, вызываемые способом учета рассеяния энергии моделями, что может повлиять на прогнозирование поведения динамических систем и принятие решений по управлению соответствующими процессами.

2 Описание движения колебательных систем

Далее с помощью линейных уравнений типа (1) при $\eta = \text{const}$ рассмотрим различия в поведении одномассовой системы при нагружении силой $F(t) = F_0 \sin(pt)$. Масса M соединена с неподвижным основанием прямым стержнем длиной L , площадью сечения A и плотностью ρ , который может создавать связь упругую либо подчиняющуюся уравнениям (1).

Дифференциальное уравнение движения такой массы имеет вид: $M\ddot{x} = F - R$, где x – перемещение массы, R – сила в связи. Перемещение связано с деформацией материала стержня зависимостью $x = L\varepsilon$, используя которую уравнение можно представить через деформацию: $\varepsilon'' = (F - R)/ML$.

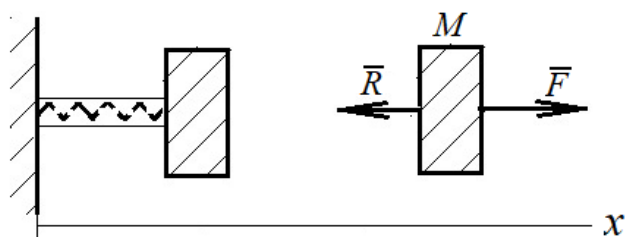


Рисунок 2 – Одномассовая система

Для связи в виде тела Фойгта уравнение колебаний запишем привычным образом через деформации, для тел Максвелла и Кельвина более удобным является запись через напряжения:

$$(a) \quad \varepsilon'' + \eta/M \cdot \varepsilon' + AE/ML \cdot \varepsilon = F/ML \\ (b) \quad \sigma'' + E/\eta \cdot \sigma' + AE/ML \cdot \sigma = FE/ML \\ (v) \quad \sigma''' + E/\eta \cdot \sigma'' + AE/ML \cdot \sigma' + AEE\varepsilon/\eta ML \cdot \sigma = (F' + FE\varepsilon/\eta)E/ML. \quad (2)$$

Для всех уравнений решения являются суммой общего решения однородного уравнения и частного, определяемого видом правой части. В соответствии с этим будем рассматривать колебания полные, затухающие (неустановившиеся, сопровождающие) и вынужденные. Начальные условия далее принимаем соответствующими состоянию покоя. При необходимости учета массы стержня его приведенную массу определяем по формуле $M_{пр} = 4/\pi^2 \cdot \rho AL$, которая обеспечивает совпадение ее частоты колебаний с нижней частотой колебаний стержня с равномерно распределенной массой.

Одним из важных моментов практического использования решений рассматриваемых уравнений является определение коэффициентов динамичности по перемещениям массы M (по деформации связи) и по развивающейся в связях продольной силе, которые определяются в виде отношения максимальных во времени значений переменных к их статическим значениям: $K_\delta^\varepsilon = \varepsilon_{\max}/(F_0/AE)$ и $K_\delta^R = R_{\max}/F_0$. Коэффициенты обоих видов представляют интерес для случаев как установившегося, так и общего процесса движения системы с учетом затухающих колебаний. Далее выражения для K_δ получим для колебаний при «слабом затухании».

2.1 Модель Фойгта

Решение для уравнения (2а) имеет вид

$$\varepsilon = e^{-nt}[A_1 \cos(k_n t) + A_2 \sin(k_n t)] + B_1 \cos(pt) + B_2 \sin(pt) \quad (3)$$

Коэффициенты частного решения равны

$$B_1 = -\varepsilon_0 \cdot 2sz / [(1 - z^2)^2 + 4s^2 z^2]; \\ B_2 = \varepsilon_0 \cdot (1 - z^2) / [(1 - z^2)^2 + 4s^2 z^2],$$

однородного уравнения: $A_1 = -B_1$,

$$A_2 = -\varepsilon_0 (1 - z^2 - 2s^2) / [(1 - z^2)^2 + 4s^2 z^2].$$

Здесь дополнительно обозначено: $n = \eta/2M$, $k = \sqrt{EA/LM}$, $z = p/k$, $s = n/k$, $k_n = k\sqrt{1 - s^2}$, $\varepsilon_0 = F_0/MLk^2$.

Переведем частное решение к амплитудной форме $\varepsilon_{\text{част}} = a_\varepsilon \sin(pt - \gamma_\varepsilon)$,

$R_{\text{част}} = a_R \sin(pt - \gamma_R)$, получаем K_δ^ε и K_δ^R для вынужденных колебаний в виде

$$K_\delta^\varepsilon = 1 / [(1 - z^2)^2 + 4s^2 z^2], \quad K_\delta^R = K_\delta^\varepsilon \cdot \sqrt{1 + 4s^2 z^2}. \quad (4)$$

Соответствующие графики приведены на рисунке 3. Здесь и далее на соответствующих рисунках отложены вдоль оси абсцисс – параметр Z , вдоль оси ординат – коэффициенты K_δ .

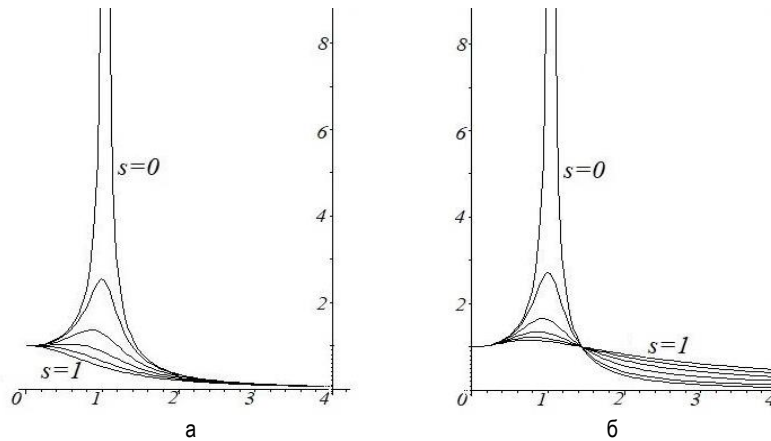
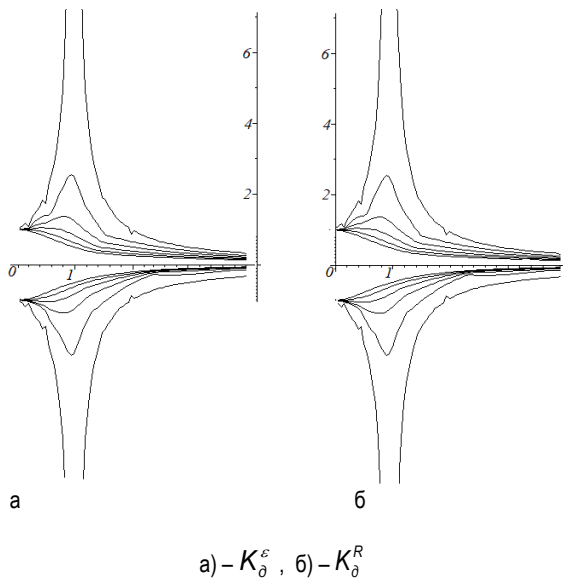


Рисунок 3 – Коэффициенты динамичности вынужденных колебаний: $S = 0.0, 0.2, \dots, 1.0, Z = 0-4$; а) – K_0^ε , б) – K_0^R

Коэффициенты динамичности с учетом сопутствующих колебаний определяем численно (рисунок 4).



а) – K_0^ε , б) – K_0^R

Рисунок 4 – Коэффициенты динамичности полных колебаний

Из рисунка 4 видно, что в отличие от случая вынужденных колебаний коэффициенты различны для положительных и отрицательных значений переменных, причем по модулю положительные значения практически всегда больше отрицательных, – при $S > 0.2$ и $Z > 1$ может наблюдаться отличие в несколько раз. Отношение коэффициентов динамичности одинаковых знаков K_0^R/K_0^ε близко к единице. Сравнение графиков на рисунке 3 и рисунке 4 показывает существенное различие соответствующих друг другу коэффициентов K_0 по величине. На рисунке 5 показано развитие зависимости $\sigma(\varepsilon)$ во времени и выход на стабильную форму петли гистерезиса. Траектория выхода зависит как от вязкости, так и от частоты возбуждения. Петля имеет форму эллипса, который с ростом вязкости увеличивает наклон к оси деформаций, поворачиваясь против часовой стрелки. Отношение размеров полуосей эллипса и его площадь зависят от значений S и Z , вначале увеличиваясь, а далее уменьшаясь при изменении уровня Z относительно значения $Z = 1$. На больших Z ось эллипса может занять положение практически вдоль оси ординат. Для удобства представления графиков на рисунке их шкалы деформировались, расчетное время движения на графиках одинаковое.

В связи с распределением усилия в связи между упругой и вязкой ветвями ($R = R_y + R_0$) напряжения, соответствующие упругим деформациям, определяются законом Гука и их коэффициенты динамичности совпадают с коэффициентами по деформациям ($K_0^R = K_0^\varepsilon$).

В окрестности резонансной зоны (при $Z \approx 1$) на зависимостях $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ реализуются биения, затухающие при наличии демпфирования.

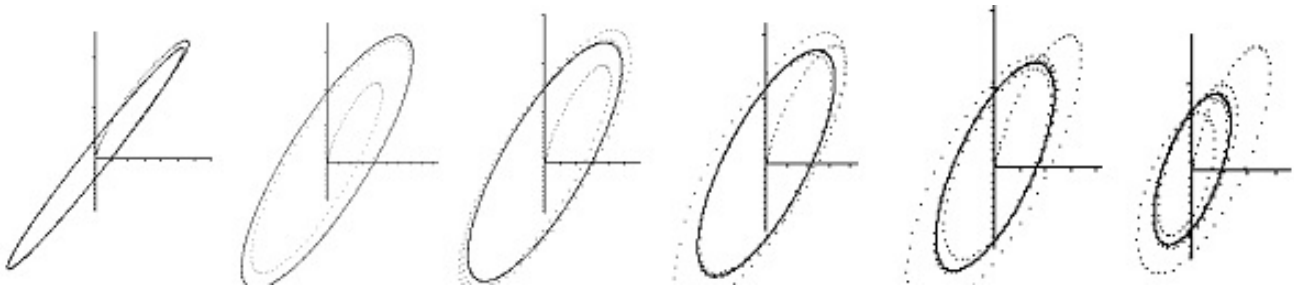


Рисунок 5 – Траектории движения изображающей точки $\sigma(\varepsilon)$ с ростом частоты возбуждения: параметр демпфирования $S = 0.3$; значения Z слева направо $Z = 0.3, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 2.1$

2.2 Модель Максвелла

Для тела Максвелла дифференциальное уравнение движения может быть записано через деформации в виде уравнения третьего порядка, что требует использования дополнительного начального условия по ускорению [1]. При записи уравнения в виде (26) решение имеет вид, аналогичный (3):

$\sigma = e^{-\eta t} [A_1 \cos(k_g t) + A_2 \sin(k_g t)] + B_1 \cos(pt) + B_2 \sin(pt)$
при константах

$$B_1 = -\sigma_0 \cdot 2qz / [(1-z^2)^2 + 4q^2 z^2],$$

$$B_2 = \sigma_0 \cdot (1-z^2) / [(1-z^2)^2 + 4q^2 z^2], \quad A_1 = -B_1,$$

$$A_2 = -(qB_1 + zB_2) / \sqrt{1-z^2},$$

где $2g = E/\eta$, $q = g/k$, $k_g = k\sqrt{1-q^2}$, $\sigma_0 = E\varepsilon_0$.

Зависимость $\varepsilon(t)$ получаем интегрированием (1а):

$\varepsilon = \sigma/E + (\int \sigma dt + C)/\eta$. Определив константу C из начального условия

$$\varepsilon(0) = A_1/E - (A_1 g/k_g + A_2)/[\eta k_g \cdot ((g/k_g)^2 + 1)] + B_1/E - B_2/(\eta p) + C/\eta = 0$$

и выделив в ней слагаемые, соответствующие частотам собственных и вынужденных колебаний, находим для последних выражение

$$\varepsilon_{\text{вын}}(t) = (B_1/E - B_2/(\eta p))(\cos(pt) - 1) + (B_2/E + B_1/(\eta p))\sin(pt), \quad (5)$$

которое далее используем для вычисления коэффициента динамичности K_δ^ε для вынужденных колебаний. Отметим, что такое разделение константы C на две части обеспечивает одновременное равенство нулю деформаций в начальный момент времени для полных, затухающих и вынужденных колебаний.

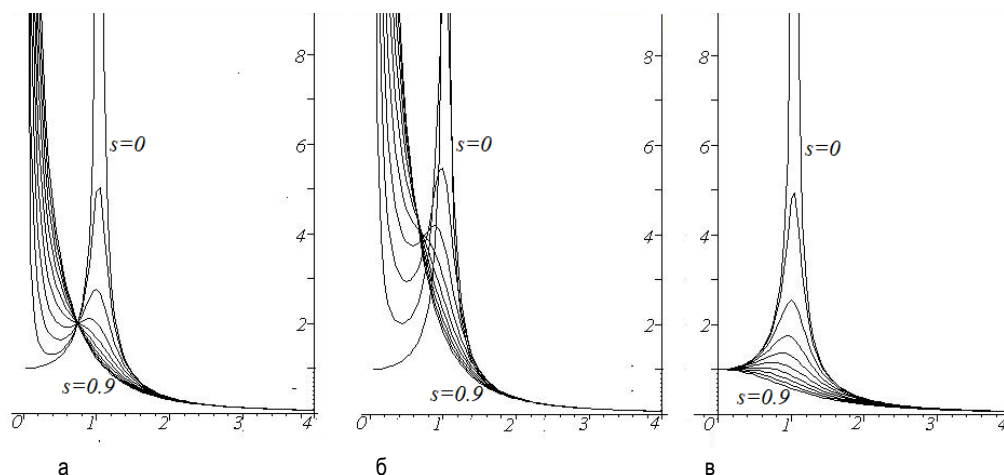
Так как в данном случае передаваемое вдоль связи усилие в упругом и вязком элементах одинаково, то коэффициент динамичности K_δ^R совпадает с коэффициентом динамичности по напряжениям K_δ^σ . Как видно из сравнения уравнений (2а) и (2б), эти коэффициенты для установившегося процесса вынужденных колебаний совпадают по форме с выражением K_δ^ε из (4). Выражение

для коэффициента $K_\delta^\varepsilon(q, z)$ с использованием (5) принимает вид

$$K_\delta^\varepsilon = \sqrt{(1 + 4q^2/z^2)/((1 - z^2)^2 + 4q^2 z^2)} + 2q/(z \cdot ((1 - z^2)^2 + 4q^2 z^2)), \quad (6)$$

в котором первое слагаемое соответствует учету только переменных компонент в (5) и совпадает с приведенным в [1].

Графики K_δ показаны на рисунке 6.



а) – K_δ^ε по [1], б) – K_δ^ε по (6), в) – K_δ^R

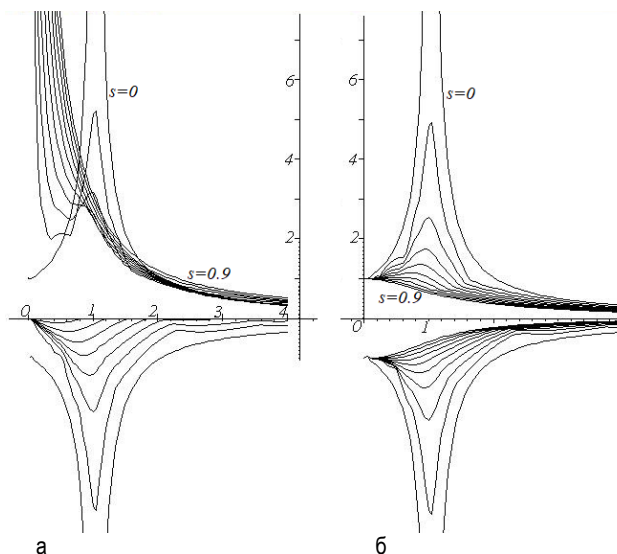
Рисунок 6 – Коэффициенты динамичности вынужденных колебаний $S = 0.0, 0.1, \dots, 0.9$

В рассматриваемой модели до значений $q \approx 0,35$ отсутствует монотонность изменения коэффициентов K_δ^ε (рисунок 6), что выражается в сложной трансформации их формы, приводящей к сближению уровней экстремальных точек и последующему их исчезновению при $q > 0,35$. После достижения параметром Z значения $Z \approx 1,5$ коэффициент K_δ^ε становится меньше единицы при всех уровнях демпфирования. Отношение коэффициентов $K_\delta^R/K_\delta^\varepsilon > 1$ независимо от величины параметров Z и g . В соответствии с этим K_δ^R по Фойгту выше, чем по Максвеллу.

Коэффициенты динамичности полных колебаний определяем численно (рисунок 7).

Во всем спектре частот коэффициенты динамичности K_δ^R для полных колебаний выше, чем для вынужденных. Коэффициенты K_δ^R для положительных и отрицательных значений σ на участке $Z < 1,0$ достаточно близки (равны при $Z = 0$ и $Z = 1,0$). Их различие, за исключением небольшого отрезка $1,5 < Z < 2,0$, увеличивается с ростом Z , и при его приближении к значению $Z = 4$ положительные больше модуля отрицательных примерно в два раза. Коэффициенты $K_\delta^\varepsilon(q, z)$ для положительных и отрицательных деформаций существенно отличаются как по уровню, так и по форме (это относится и к сравнению K_δ^ε для вынужденных колебаний в моделях Фойгта и Максвелла).

Как и для тела Фойгта, вблизи точки $Z = 1$ на начальном участке движения имеют место низкочастотные затухающие биения. Скорости затухания при используемых параметрах моделей примерно соответствуют друг другу.



а) – K_δ^ε , б) – K_δ^R

Рисунок 7 – Коэффициенты динамичности полных колебаний $S = 0.0-0.9$

Петли гистерезиса при вынужденных колебаниях с ростом частоты возбуждения меняют свои размеры и форму, поворачиваясь против часовой стрелки. Траектории $\sigma(\varepsilon)$ для полных колебаний (рисунок 8) петлеобразны, с ростом Z их переход к стабильной форме усложняется, а занимаемая область смещается вдоль оси деформаций к началу координат.

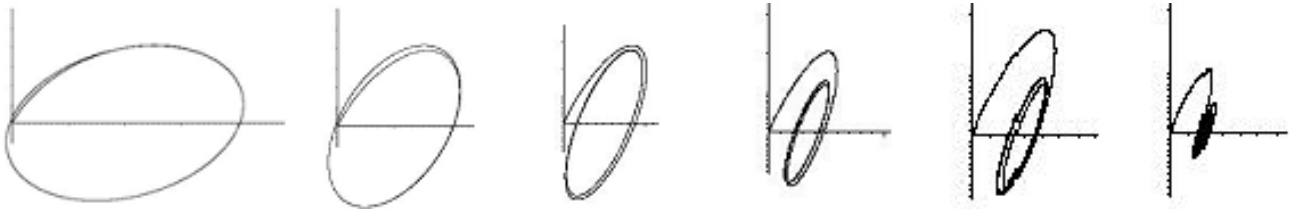


Рисунок 8 – Траектории движения изображающей точки $\sigma(\varepsilon)$ с ростом частоты возбуждения. Параметр демпфирования $S = 0,3$; значения Z слева направо $Z = 0,3, 0,6, 1,2, 1,8, 2,1, 3,3$

2.3 Модель Кельвина

Для тела Кельвина дифференциальные уравнения движения может быть записано через деформации в виде уравнения третьего порядка, что требует использования начального условия по ускорению [1]. Устойчивость колебательного решения обеспечивается [1] при $E/E_\Sigma > 1$, т. е. всегда.

Решение дифференциального уравнения в форме (2в) требует определения трех корней $\gamma_{1,2,3}$ характеристического уравнения $\gamma^3 + E/\eta \cdot \gamma^2 + AE/ML \cdot \gamma + AEE_\Sigma/ML\eta = \gamma^3 + 2g \cdot \gamma^2 + k^2 \cdot \gamma + 2g_\Sigma k^2 = 0$, где $2g_\Sigma = E_\Sigma/\eta$. В данной работе это выполнено по [15] с использованием тригонометрической формы решения. Условие устойчивости решения также всегда выполняется: $g > g_\Sigma$.

Для напряжений получаем выражение $\sigma(t) = A_0 \exp(\gamma_1 t) + \exp(\gamma_2 t) \cdot (A_1 \cos(\gamma_3 t) + A_2 \sin(\gamma_3 t)) + B_1 \cos(pt) + B_2 \sin(pt)$. Константы частного решения равны:

$$E\varepsilon(t) = (\gamma_1 + 2g)/(\gamma_1 + 2g_\Sigma) \cdot A_0 \exp(\gamma_1 t) + \exp(\gamma_2 t) / (\gamma_3((2\gamma + 2g_\Sigma)/\gamma_3)^2 + 1) \cdot \Phi_\varepsilon[\gamma_2, \gamma_3, g, g_\Sigma, A_1, A_2, \cos(\gamma_3 t), \sin(\gamma_3 t)] + 1/(p((2g_\Sigma/p)^2 + 1)) \cdot \Phi_\sigma[p, g, g_\Sigma, B_1, B_2, \cos(pt), \sin(pt)] + C_0 \exp(-2g_\Sigma t) \quad (8)$$

Первые два слагаемых в (8) представляют собой затухающее движение, связанное происхождением с напряжениями, третье – установившееся (незатухающее) вынужденные колебания, четвертое – затухающее движение, зависящее от всех входящих в (8) параметров: $C_0 = C_0[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g, g_\Sigma, A_1, A_2, B_1, B_2]$. Аналогично тому, как было сделано выше для модели Максвелла, в константе C_0 можно выделить слагаемые, своим появлением не связанные с константами A_0, A_1, A_2 :

$D = 1/(p((2g_\Sigma/p)^2 + 1)) \cdot [2(g_\Sigma - g)B_2 + (4g \cdot g_\Sigma/p + p)B_1]$, и вместе с установившимися вынужденными колебаниями обеспечивающие равенство нулю вынужденной компоненты колебаний в момент $t = 0$.

$$B_1 = \sigma_0 \cdot 2Z \cdot [s(k_\Sigma - Z^2) - q_\Sigma(1 - Z^2)] / [(k_\Sigma - Z^2)^2 s^2 + (1 - Z^2)^2 Z^2],$$

$$B_2 = \sigma_0 \cdot [4sq_\Sigma(k_\Sigma - Z^2) + Z^2(1 - Z^2)] / [(k_\Sigma - Z^2)^2 s^2 + (1 - Z^2)^2 Z^2],$$

где кроме принятых ранее обозначений введено: $k_\Sigma = g_\Sigma/g = E_\Sigma/E$, $q_\Sigma = g_\Sigma/k$.

Деформации определяются из уравнения (1в) после записи его в форме

$$\varepsilon' + 2g_\Sigma \varepsilon = (\sigma' + 2g\sigma)/E. \text{ Решение этого уравнения имеет вид:}$$

$$E\varepsilon(t) = \exp(-g_\Sigma t) \cdot (\int \exp(g_\Sigma t) \cdot (\sigma' + 2g\sigma) dt + C_0). \quad (7)$$

Неопределенные константы A_0, A_1, A_2 и C_0 находятся из нулевых начальных условий по напряжениям, деформациям и их скоростям: $\sigma(0) = \sigma'(0) = \varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = 0$.

Ввиду громоздкости выражения, получаемого при интегрировании уравнения (7), приведем только общую форму этого решения:

Точно так же остающиеся в C_0 слагаемые обеспечивают равенство нулю компонент движения, связанных с собственными колебаниями.

Коэффициенты динамичности для установившихся колебаний имеют вид:

$$K_\sigma^\varepsilon = \sqrt{(Z^2 + 4s^2) / (Z^2(1 - Z^2)^2 + 4s^2(k_\Sigma - Z^2)^2)},$$

$$K_\sigma^\sigma = \sqrt{(Z^2 + 4k_\Sigma^2 s^2) / (Z^2(1 - Z^2)^2 + 4s^2(k_\Sigma - Z^2)^2)}.$$

Ниже представлены результаты вычислений при изменении Z в пределах $0 < Z < 2$.

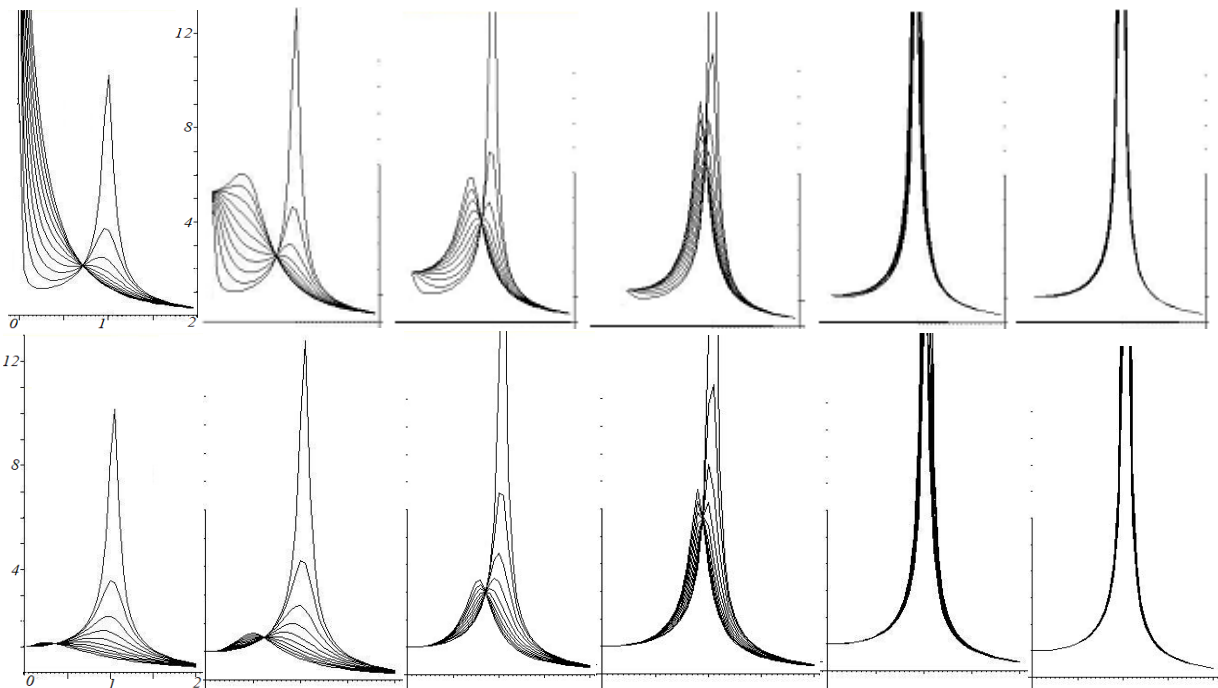


Рисунок 9 – Коэффициенты динамичности вынужденных установившихся колебаний. Верхний ряд – деформации, нижний – напряжения, $0 < Z \leq 2$, $0,05 < S \leq 0,95$, k_Σ слева направо $k_\Sigma = 0,05, 0,2, 0,5, 0,7, 0,9, 0,95$

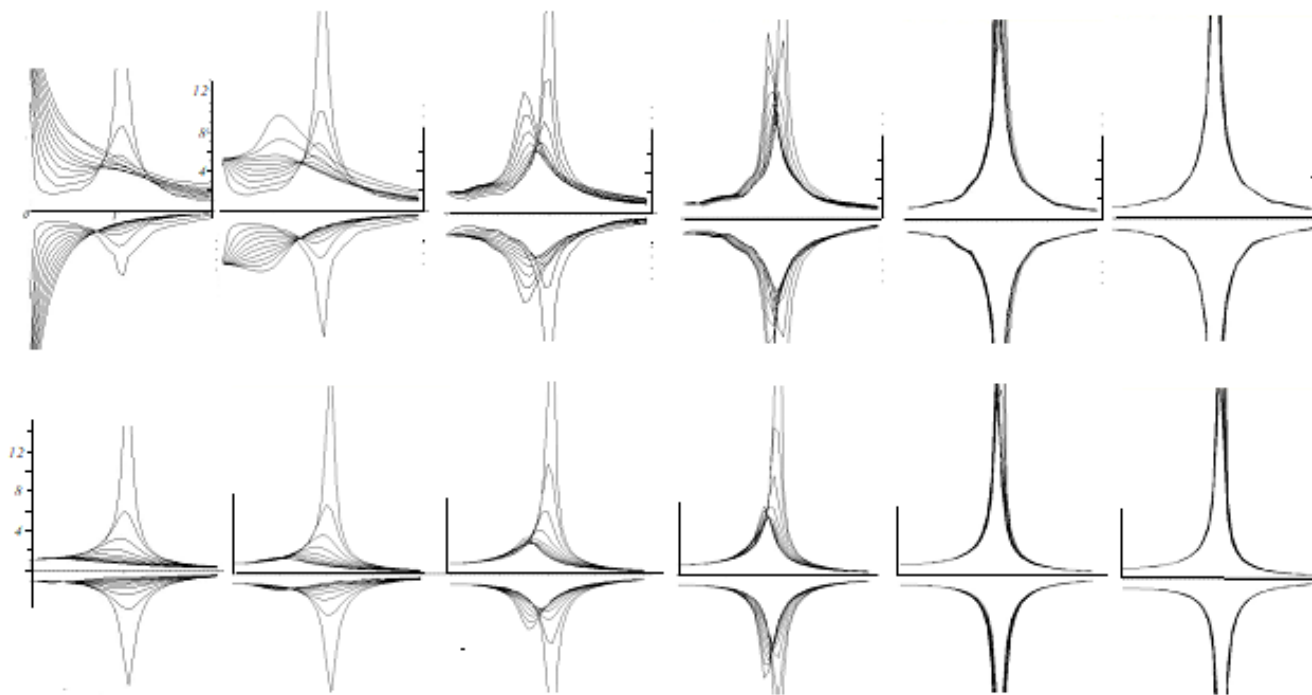


Рисунок 10 – Коэффициенты динамичности полных колебаний. Верхний ряд – деформации, нижний – напряжения, $0 < Z \leq 2$, $0.05 < S \leq 0.95$, k_x слева направо $k_x = 0.05, 0.2, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95$

Формы приведенных графиков показывают существенное отличие поведения материала связи по модели Кельвина от других моделей. Влияние модуля E_x неоднозначно и по-разному сказывается на уровнях напряжений и деформаций как полных, так и вынужденных, и локально зависит от значений частотных параметров задачи.

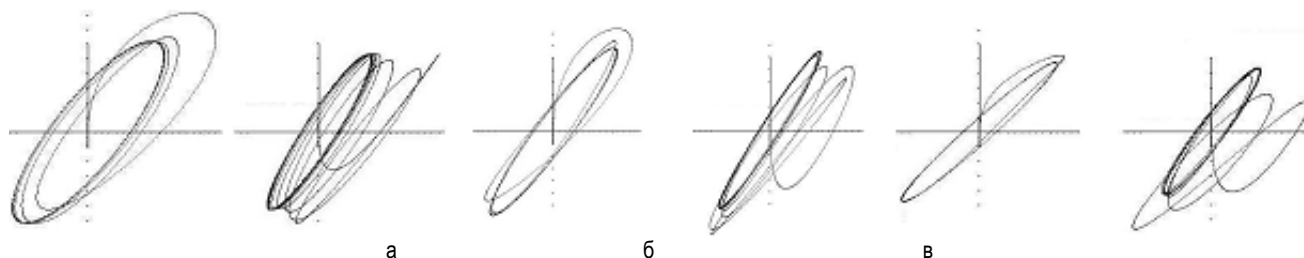
Рост E_x вызывает сложную трансформацию поведения механической системы, характеризующуюся изменением формы графиков K_d в направлении от модели Максвелла к модели Фойгта. Имеет место увеличение ординаты узловой точки на графиках $\sigma_{\text{вн}}$, $\varepsilon_{\text{вн}}^{\text{уст}}$ и увеличение коэффициентов K_d для $\sigma_{\text{вн}}$. Значения K_d для $\varepsilon_{\text{вн}}^{\text{уст}}$ также в целом возрастают, но при низких уровнях E_x на участке оси Z от нуля до узловой точки (при $E_x/E = 0.2$ ей соответствует $Z \approx 0.65$) имеет место их более сложное поведение.

Для полных деформаций узловая точка “размывается”. Модуль K_d отрицательных деформаций меньше K_d положительных во всем диапазоне изменения Z и S , но с ростом E_x это различие уменьшается, а сам процесс установления во времени напряжений и дефор-

маций происходит быстрее. Максимальные уровни σ и ε достигаются в направлении воздействия (в положительной области), но при больших уровнях затухания (например, для $S \approx 0.9$) максимум напряжений меняет знак при Z , даже не достигших значения $Z = 1$. Уровень E_x сложным образом влияет на максимальные значения K_d напряжений и деформаций: если с уровня $k_x \approx 0.5$ коэффициенты динамичности возрастают во всем диапазоне изменения Z , то при более низких значениях параметра k_x их поведение проявляет зависимость как от E_x , так и от частоты воздействия, что особенно ярко выражается для деформаций (рисунок 10).

На графиках $\varepsilon_{\text{полн}}$ наблюдаются затухающие биения небольшой глубины, более выраженные при $Z > 1$, и слабеющие с ростом E_x . На графиках напряжений они выражены в меньшей степени или не наблюдаются.

Траектории движения изображающей точки $\sigma(\varepsilon)$ во времени и выход на стабильную форму петли гистерезиса в модели Кельвина повторяют основные черты предыдущих моделей, имея несколько более сложный характер.



а) $k_x = 0.2$, $S = 0.3$, $Z = 0.6$ и $Z = 1.2$; б) $k_x = 0.5$, $S = 0.3$, $Z = 0.6$ и $Z = 1.2$; в) $k_x = 0.5$, $S = 0.6$, $Z = 0.6$ и $Z = 1.2$
Рисунок 11 – Траектории движения изображающей точки $\sigma(\varepsilon)$ при различных значениях параметров k_x , S и Z

3 Заключение

Рассмотрена задача о продольных колебаниях одномассовой системы при действии циклической синусоидальной нагрузки со связью в виде прямого стержня, для которого реологические свойства материала описываются линейными моделями Фойгта, Максвелла и Кельвина. Проведен анализ отличий в напряженно-деформированном состоянии таких связей для случая слабого затухания.

Поведение рассмотренных систем сложным образом зависит от совокупности их частотных параметров, что особенно характерно для дорезонансной области внешнего воздействия. Расчеты показывают, что в связи с двухчастотностью полных колебаний их коэффициенты динамичности могут заметно превышать соответствующие значения для вынужденных. Поэтому учет затухающих компонент колебаний для всех моделей может оказать существенное

влияние на назначение допустимых уровней нагружения применительно к фактическим условиям эксплуатации изделий. Это особенно касается ограничения деформаций.

Необходимо отметить, что одним из недостатков линейных моделей, касающихся описания процессов затухания колебаний в реальных материалах, является несоответствие зависимости поглощенной энергии от частоты и амплитуды воздействия опытным данным, что может быть связано с учетом трансформации структуры материалов при изменениях напряженно-деформированного состояния.

Список цитированных источников

1. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1968. – 416 с.
2. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
3. Белаш, Т. А. Энергопоглощение в системах сейсмозащиты зданий и сооружений : монография / Т. А. Белаш, А. М. Уздин. – СПб. : ПГУПС, 2020. – 178 с.
4. Петров, И. Б. Математическое моделирование в медицине и биологии на основе моделей механики сплошных сред / И. Б. Петров // Труды МФТИ. – 2009. – Т. 1, № 1. – С. 5–16.
5. Моделирование механического поведения вязкоупругого элемента при малоцикловом деформировании / М. Ю. Демина, Л. С. Полугрудова, И. Н. Андропов, Н. П. Богданов // Известия Коми научного центра УрО РАН. – Сыктывкар, 2013. – Выпуск 1 (13). – С. 79–83.
6. Богданов, Н. П. Моделирование ползучести биологических тканей / Н. П. Богданов, М. Ю. Демина, Л. С. Полугрудова // Известия Коми научного центра УрО РАН. – 2011. – Вып. 2 (6). – С. 76–79.
7. Гуревич, Г. И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн / Г. И. Гуревич. – М. : Наука, 1974. – 483 с.
8. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров / А. Л. Рабинович. – М. : Наука, 1970. – 482 с.
9. Рыбин, В. В. Большие пластические деформации и разрушение материала / В. В. Рыбин. – М. : Metallurgiya, 1986. – 224 с.
10. Лихачев, В. А. Структурно-аналитическая теория прочности / В. А. Лихачев, В. Г. Малинин. – СПб. : Наука, 1993. – 470 с.
11. Панин, В. Е. Структурные уровни деформации твердых тел / В. Е. Панин, В. А. Лихачев, Ю. В. Гриняев. – Новосибирск : Наука, 1990. – 225 с.
12. Структурные уровни пластической деформации и разрушения / В. Е. Панин, Ю. В. Гриняев, В. И. Данилов [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1990. – 225 с.
13. Хохлов, А. В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями / А. В. Хохлов // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2016. – № 6. – С. 36–41.
14. Холодарь, Б. Г. Описание поведения упруго-пластических материалов с помощью уравнений Максвелла с нелинейной вязкостью / Б. Г. Холодарь // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2025. – Вып. 18. – С. 167–177.
15. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1970. – 720 с.

References

1. Rzhanitsyn, A. R. Teoriya polzuchesti / A. R. Rzhanitsyn. – M. : Strojizdat, 1968. – 416 s.
2. Rabotnov, YU. N. Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel / YU. N. Rabotnov. – M. : Nauka, 1977. – 384 s.
3. Belash, T. A. Energopogloshchenie v sistemah sejsmozashchity zdaniy i sooruzhenij : monografiya / T. A. Belash, A. M. Uzdin. – SPb. : PGUPS, 2020. – 178 s.
4. Petrov, I. B. Matematicheskoe modelirovanie v medicine i biologii na osnove modelej mekhaniki sploshnyh sred / I. B. Petrov // Trudy MFTI. – 2009. – T. 1, № 1. – S. 5–16.
5. Modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya vyazkoupругogo elementa pri malociklovom deformirovanii / M. YU. Demina, L. S. Polugrudova, I. N. Andropov, N. P. Bogdanov // Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN. – Syktyvkar, 2013. – Vypusk 1 (13). – S. 79–83.
6. Bogdanov, N. P. Modelirovanie polzuchesti biologicheskikh tkanej / N. P. Bogdanov, M. YU. Demina, L. S. Polugrudova // Izve-stiya Komi nauchnogo centra UrO RAN. – 2011. – Vyp. 2 (6). – S. 76–79.
7. Gurevich, G. I. Deformiruemosť sred i rasprostranenie sejsmicheskikh voln / G. I. Gurevich. – M. : Nauka, 1974. – 483 s.
8. Rabinovich, A. L. Vvedenie v mekhaniku armirovannyh polimerov / A. L. Rabinovich. – M. : Nauka, 1970. – 482 s.
9. Rybin, V. V. Bol'shie plasticheskie deformacii i razrushenie materiala / V. V. Rybin. – M. : Metallurgiya, 1986. – 224 s.
10. Lihachev, V. A. Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti / V. A. Lihachev, V. G. Malinin. – SPb. : Nauka, 1993. – 470 s.
11. Panin, V. E. Strukturnye urovni deformacii tverdyh tel / V. E. Panin, V. A. Lihachev, YU. V. Grinyaev. – Novosibirsk : Nauka, 1990. – 225 s.
12. Strukturnye urovni plasticheskoy deformacii i razrusheniya / V. E. Panin, YU. V. Grinyaev, V. I. Danilov [i dr.]. – Novosibirsk : Nauka, 1990. – 225 s.
13. Hohlov, A. V. Svoystva nelinejnoj modeli vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvela s dvumya material'nymi funkciyami / A. V. Hohlov // Vestn. Mosk. un-ta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. – 2016. – № 6. – S. 36–41.
14. Holodar', B. G. Opisaniye povedeniya upругo-plasticheskikh materialov s pomoshch'yu uravnenij Maksvela s nelinejnoj vyazko-st'yu / B. G. Holodar' // Mekhanika. Issledovaniya i innovacii. – Gornel', 2025. – Vyp. 18. – S. 167–177.
15. Korn, G. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1970. – 720 s.

Материал поступил 25.05.2026, одобрен 01.07.2026, принят к публикации 06.07.2026