

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЕРИФИКАЦИИ И ВАЛИДАЦИИ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В. В. Тур¹, В. В. Надольский²

¹ Д. т. н., профессор, заведующий кафедрой технологии бетона и строительных материалов, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: tur.s320@mail.ru

² К. т. н., доцент, доцент кафедры «Строительные конструкции имени доктора технических наук, профессора Т. М. Пецольда», Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь, e-mail: Nadolski@mail.ru

Реферат

Численные методы анализа, применяемые для имитационного моделирования конструкций, становятся ключевым инструментом проектирования и оценки строительных объектов, особенно при разработке новых и сложных инженерных конструктивных систем. Однако достоверность и точность результатов численных методов анализа напрямую определяет уровень надёжности строительных сооружений. В статье представлена комплексная методология тестирования достоверности и точности имитационных моделей при применении процедур верификации и валидации. Уточнены и систематизированы основные термины и их определения, относящихся к выполнению процедур верификации и валидации применительно к задачам теории сооружений. Рассмотрены основные этапы разработки численной оценки – от концептуальной и математической формулировок до построения численной модели. Детально описаны процессы верификации, направленные на подтверждение корректности численной реализации математической модели и оценку точности получаемых решений, и валидации, обеспечивающей подтверждение адекватности модели реальным физическим процессам и её прогностической способности. Особое внимание уделено количественной оценке неопределённостей моделирования, а также определению минимально необходимого количества экспериментальных данных для эффективной валидации. На основе статистического анализа метрики точности показано, что для новых типов конструкций требуется не менее четырёх независимых результатов валидации, при этом оптимальный эффект достигается в диапазоне от четырёх до шести экспериментов. Полученные результаты формируют концептуальную основу и практическое руководство для исследователей и инженеров, использующих численное моделирование при проектировании строительных конструкций.

Ключевые слова: верификация, валидация, компьютерное моделирование, численные методы анализа, численная модель, несущая способность, метод конечных элементов, точность модели, неопределённость.

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF VERIFICATION AND VALIDATION OF NUMERICAL MODELS OF BUILDING STRUCTURES

V. V. Tur, V. V. Nadolski

Abstract

Numerical modeling is becoming a key tool in the design and assessment of building structures, especially for innovative and complex engineering solutions. However, the credibility of simulation results directly affects the safety and reliability of structures. This paper presents a comprehensive methodology for ensuring the credibility of computational models through the processes of verification and validation. The fundamental terms and definitions related to V&V are refined and systematized in the context of structural mechanics. The stages of model development – from conceptual and mathematical formulations to the creation of a computational implementation – are described in detail. The study focuses on verification processes aimed at confirming the correctness of numerical implementation and evaluating solution accuracy, as well as validation procedures intended to confirm the adequacy of the model to physical reality and assess its predictive capability. Special attention is given to the quantitative assessment of modeling and experimental uncertainties and to determining the minimum number of experimental data points required for effective validation. Based on statistical analysis of the accuracy metric, it is shown that at least four validation results are required for new structural systems, with optimal reliability achieved within the range of four to six experiments. The findings form a conceptual and methodological foundation as well as a practical guideline for researchers and engineers applying numerical modeling in the design of building structures.

Keywords: verification, validation, computer modeling, numerical model, load-bearing capacity, finite element method, model accuracy, uncertainty.

Введение

Современное проектирование строительных конструкций все в большей степени опирается на результаты, полученные с помощью численных методов анализа, применяемых для имитационного моделирования конструкций или конструктивных систем [1, 2]. Сложные и новые конструктивные элементы – тонкостенные, гофрированные, перфорированные балки, пространственные узлы – требуют применения современных численных методов анализа, позволяющих прогнозировать их поведение и несущую способность на основе имитационного моделирования. [3, 4]. Несмотря на это, достоверность и точность таких моделей и их результатов, полученных численными методами зачастую не подвергается достаточной критической оценке со стороны проектировщиков, экспертов и заказчиков, базируясь во многом на вере в возможности программного обеспечения и квалификацию инженера [5].

Доверие к «разноцветным» визуализациям результатов анализа методом конечных элементов (МКЭ) не может заменять собой строгих процедур установления точности и адекватности модели.

Численные методы, применяемые для имитационного моделирования, в отличие от аналитических методов, по своей природе являются приближениями к реальности, ограниченными доступными знаниями и данными, принятыми приближениями и решениями с помощью вычислительных алгоритмов. Примерами таких приближений являются моделирование материала как однородного континуума, использование билинейных диаграмм деформирования материала, идеализация граничных условий и т. д. [6]. Применение этих допущений может быть приемлемым, однако инженер обязан гарантировать, что выбранные приближения адекватны для конкретной задачи и целей моделирования (предполагаемого использования модели).

Ключевыми процессами, позволяющими установить и продемонстрировать достоверность численной модели, являются верификация и валидация [7, 8]. С 2017 года в Российской Федерации действует серия национальных стандартов ГОСТ Р 57700, посвящённых компьютерному моделированию, которые устанавливают определения и базовые принципы верификации и валидации [9].

Согласно ГОСТ Р 57700.21-2020, «*верификация модели – это проверка корректности компьютерного моделирования, подтверждающая соответствие компьютерной реализации её исходной математической модели. Валидация модели – это проверка адекватности компьютерной модели моделируемому объекту*» [9].

Таким образом, верификация отвечает на вопрос: «*Правильно ли решены уравнения?*», а валидация – «*Те ли самые уравнения решены?*» [10].

Международные и отечественные стандарты (ASME V&V 10, ISO 23555, ГОСТ Р 57700) определяют эти процедуры как обязательные элементы жизненного цикла численных моделей, однако в строительной отрасли их применение всё ещё носит крайне ограниченный характер. Целью данного исследования является разработка комплексной методики верификации и валидации компьютерных численных моделей, применяемых для оценки несущей способности строительных конструкций, устраняющая терминологические противоречия и предоставляющая количественные рекомендации по объёму выборки экспериментальных данных для валидации. Задачи работы включают: систематизацию и адаптацию терминологии валидации и верификации применительно к задачам теории сооружений; формирование чёткой последовательности этапов разработки и проверки численной модели; разработку практических рекомендаций по проведению верификации и валидации, включая оценку неопределённостей и определение необходимого объёма выборки экспериментальных данных; анализ влияния количества валидационных экспериментов на значения коэффициента надёжности.

В данной статье обобщены результаты системных исследований в данном направлении, которые представлены в работах [11–16].

Обзор литературы

Проблематике верификации и валидации численных моделей посвящено значительное количество работ как зарубежных, так

и отечественных авторов. основополагающие принципы и руководства были сформулированы в документах AIAA G-077-1998 [17] и ASME V&V 10-2006 [18], которые легли в основу многих последующих исследований.

В области строительных конструкций вопросы верификации и валидации активно исследуются применительно к физически и геометрически нелинейному анализу и работе стальных элементов при сложных напряженных состояниях. Так, в работах [3, 4, 14] рассматривается верификация и валидация моделей тонкостенных балок при совместном действии сдвига и локальной нагрузки. В исследовании [13] представлен статистический анализ погрешностей численных моделей несущей способности стальных элементов, что является важным шагом на пути к количественной оценке точности. В работе [8] подробно анализируются процедуры верификации и валидации численных моделей, а в [14, 15] предлагаются подходы к оценке расчётного значения несущей способности на основе численных моделей с учётом неопределённостей. Вопросы подтверждения качества программного обеспечения и тестирования численных алгоритмов рассматриваются в [12, 20, 21].

Несмотря на наличие существенного задела, отмечается недостаток комплексных методик, адаптированных для задач проектирования строительных конструкций, которые бы объединяли терминологию, этапы моделирования и рекомендации по учёту неопределённостей в расчётах надёжности. Представленное исследование направлено на восполнение этого пробела.

Материалы и методы

Терминологическая основа. В основе методики лежит система терминов (Таблица 1), адаптированная из ГОСТ Р 57188-2016 [22], ГОСТ Р 57700.21-2020 [9] и международных руководств [17, 18].

Таблица 1 – Ключевые термины и определения

Термин	Определение
Верификация	Процесс подтверждения того, что компьютерная численная модель представляет лежащую в основе математическую модель и её решение с установленной точностью
Верификация программного обеспечения	Процесс исключения ошибок и минимизации погрешностей в алгоритме численного решения и его компьютерном коде при любых обстоятельствах, при которых будет применяться программное обеспечение
Верификация компьютерной численной модели	Процесс исключения ошибок и оценки погрешности, связанной с особенностями дискретизации и численного решения для рассматриваемой модели
Валидация	Процесс подтверждения того, что компьютерная численная модель в заявленной области применения позволяет с определённой точностью моделировать реальные процессы (обладает прогностической способностью)
Концептуальная модель	Совокупность допущений и описаний физических явлений, представляющих поведение объекта моделирования
Математическая модель	Математические уравнения (управляющие, определяющие), граничные и начальные условия, описывающие концептуальную модель
Компьютерная численная модель	Численная реализация математической модели в форме дискретизации, алгоритмов решения и критериев сходимости
Ошибка	Признанный недостаток, не связанный с недостатком знаний или упрощениями (например, опечатка в значении свойства материала). Цель верификации и валидации – исключение
Погрешность	Признанный недостаток, связанный с преднамеренными упрощениями (например, размер сетки КЭ, билинейная диаграмма). Цель верификации и валидации – оценка и уменьшение
Неопределённость	Потенциальный недостаток, связанный с недостатком знаний или изменчивостью (например, разброс предела текучести). Цель верификации и валидации – оценка и учёт

Этапы разработки и проверки имитационной компьютерной модели. Процесс компьютерного моделирования разбит на последовательные этапы [16]:

1. Формулировка концептуальной модели: определение объекта моделирования, предполагаемого использования, интересующих характеристик поведения (несущая способность, жёсткость, форма потери устойчивости). Идентификация и ранжирование физических явлений, влияющих на эти характеристики. Формирование допущений и идеализаций.

2. Переход к математической модели или выбор и параметризация готовой математической модели (как правило перевод концептуальной модели в систему уравнений уже выполнен разработчиком

ми программного обеспечения): граничных и начальных условий, определяющих соотношений для материалов.

3. Создание компьютерной численной модели: выбор типа и плотности пространственной дискретизации (сетки КЭ), временных шагов, алгоритмов решения, критериев сходимости. Задание физических параметров, параметров дискретизации и параметров численного решения.

4. Верификация модели:

○ *верификация программного обеспечения* – проверка разработчиком программного обеспечения корректности реализации численных алгоритмов на основе тестовых задач с известными аналитическими или высокоточными численными решениями;

○ *верификация численной модели* – оценка погрешностей, связанных с дискретизацией (размер сетки, тип КЭ) и настройками решателя для конкретной модели. Основной метод – анализ сходимости на серии расчётов с последовательным измельчением сетки. Определяется наблюдаемый порядок сходимости и конвергентное (асимптотическое) значение интересующей характеристики.

5. *Валидация модели*: сравнение результатов верифицированной численной модели с эталонными данными. Этапы валидации:

○ *качественное сравнение* – сопоставление общего поведения и форм разрушения/деформирования модели и экспериментального образца для исключения грубых ошибок концептуальной модели;

○ *количественное сравнение* – выбор метрики точности (например, $\theta = F_{\text{модель}} / F_{\text{эксперимент}}$) и оценка ее статистических характеристик (математическое ожидание μ_θ , коэффициент вариации V_θ);

○ *анализ неопределённостей* – оценка неопределённостей как экспериментальных данных, так и моделирования (погрешности дискретизации, изменчивость свойств материалов).

6. *Обеспечение надёжности*: полученные статистические характеристики метрики точности используются совместно с неопределённостью базисных переменных для определения расчётного значения несущей способности с требуемым уровнем надёжности [13, 14].

7. *Документирование*: обязательный этап, включающий описание всех моделей, допущений, параметров, процедур верификации и валидации, результатов и установленных ограничений на применение модели.

Методы оценки численной погрешности при верификации.

Для верификации численной модели применяются апостериорные методы оценки погрешности:

- *экстраполяция Ричардсона*: Метод, позволяющий оценить конвергентное значение и погрешность решения на основе расчётов на нескольких сетках с разной плотностью. Критически важно, чтобы решения находились в режиме асимптотической сходимости;

- *индекс сходимости сетки (GCI)*: Развитие метода Ричардсона, включающее эмпирический коэффициент безопасности для более надёжной оценки границы погрешности [18, 23].

Методы валидации и анализа неопределённостей. Для валидации используются:

- *метрики точности*: точечные (сравнение в конкретной точке, например, максимальной нагрузки) и интегральные (сравнение кривых «нагрузка-перемещение»);

- *статистический анализ* – оценка среднего значения и коэффициента вариации метрики точности по выборке результатов сравнения с экспериментами;

- *байесовское обновление* – метод уточнения статистических характеристик метрики точности (μ_θ, V_θ) по мере поступления новых экспериментальных данных, позволяющий учесть априорную информацию [14, 24].

Результаты исследования

1. Рекомендации по объёму экспериментальных данных для валидации.

Для определения минимально необходимого и оптимального количества экспериментальных результатов, применяемых при выполнении процедуры валидации, был проведён параметрический анализ зависимости коэффициента надёжности γ_R от числа n (количества экспериментов при валидации) при различных коэффициентах вариации V_θ метрики точности [11]. Анализ проводился для двух сценариев: при неизвестном и априорно известном стандартном отклонении, с использованием байесовского обновления статистических характеристик [14]. Исследование выполняли при репрезентативных для стальных конструкций коэффициентах вариации метрики точности V_θ (5–11 %) и неопределённости базисных переменных ~7 % [13, 14, 15, 25, 26].

Результаты исследования [11] показывают, что для новых типов конструкций необходимо не менее четырех результатов валидации (рисунок 1). Наибольший эффект от увеличения количества экспериментов, выражающийся в значимом снижении требуемого коэффициента надёжности, наблюдается в диапазоне от четырех до шести результатов. При числе валидационных испытаний $n \geq 4$ дисперсия метрики θ снижается на 25 %, при $n \geq 6$ – на 35 %. Увеличение числа экспериментов свыше 10 даёт лишь незначительное улучшение достоверности, но резко повышает затраты. При $n < 4$ статистическая неопределённость оценок V_θ становится неприемлемо высокой, что вынуждает применять консервативные (завышенные) коэффициенты надёжности, а прогностическая способность модели приобретает в значительной степени интуитивный, а не математически обоснованный характер.

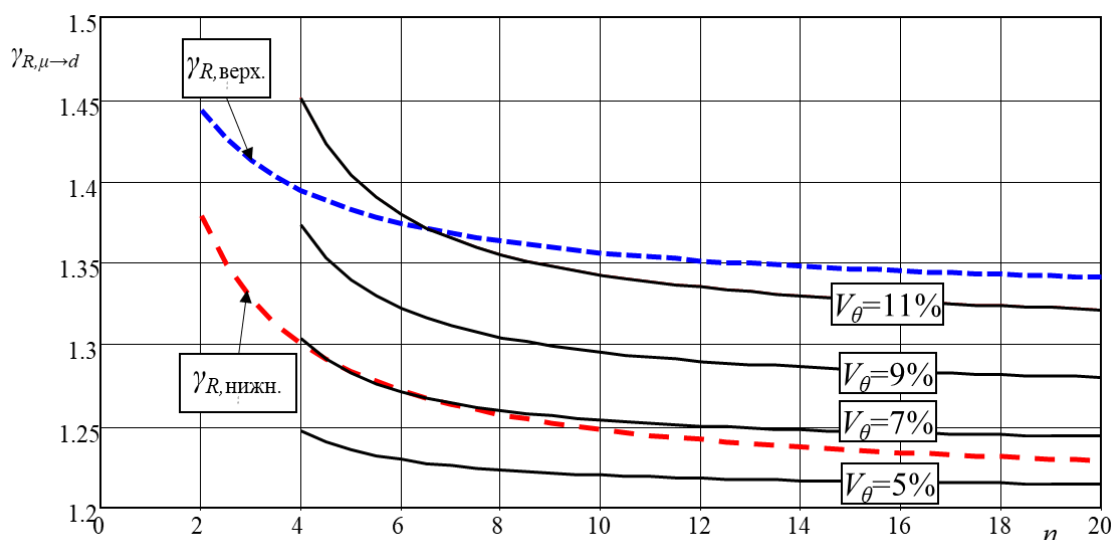


Рисунок 1 – Зависимость коэффициента надёжности от количества экспериментальных результатов при различных коэффициентах вариации метрики точности (V_θ) [11]

Верхняя граница коэффициента надёжности (синяя штриховая линия) соответствует наиболее консервативному значению коэффициента вариации меры точности (принят равным 12 %), при этом уточнение статистических характеристик выполнено байесовским методом в предположении известного стандартного отклонения.

Нижняя граница (красная штриховая линия) получена при минимальном коэффициенте вариации 5 % и также с использованием байесовского подхода.

2. Классификация и учёт неопределённостей, погрешностей, ошибок. Процессы верификации и валидации численных

моделей требуют системного подхода к выявлению, классификации и количественному учёту неопределённости, погрешностей, ошибок. В инженерной практике данные факторы оказывают существенно влияние на результаты моделирования и принимаемые проектные решения, поэтому корректная их классификация является ключевым элементом обеспечения достоверности расчётных результатов. В настоящей работе предлагается структурированная классификация неопределённости, обеспечивающая их различение по природе возникновения и определяющая методологию последующего количественного учёта.

Неопределённость (англ. *uncertainty*) представляет собой *потенциальный недостаток* имитационной модели или данных, обусловленный либо естественной вариабельностью параметров, либо недостатком знаний. В отличие от ошибок и погрешностей, неопределённость не является следствием некорректного моделирования, а отражает *объективные и познавательные ограничения*. Примеры неопределённости включают разброс механических свойств, вариабельность геометрических параметров, неполноту данных о реальном нагружении и т. д. Основные задачи верификации и валидации заключаются в выявлении неопределённости, количественной оценке их влияния на результаты моделирования и правильном выборе методов обеспечения надёжности. Дополнительно проводится разделение на неустраняемую (случайную) и устранимую (эпистемическую) неопределённость.

Неустраняемая или случайная неопределённость (англ. *aleatory uncertainty*) обусловлена естественной вариабельностью физических свойств и параметров системы. Она отражает объективную случайность процессов и не может быть уменьшена за счёт дополнительных исследований. К типичным источникам случайной неопределённости относятся разброс механических характеристик материалов (например, предела текучести), геометрические несовершенства элементов, а также вариации нагрузок и внешних условий. Основная задача верификации и валидации в данном случае состоит в корректной идентификации статистических характеристик неопределённости и включении их влияния в расчёт несущей способности.

Устранимая или эпистемическая неопределённость (англ. *epistemic uncertainty*) связана с недостаточностью знаний о системе и отражает ограниченность доступной информации о механизмах работы конструкции, параметрах материалов или точных условиях применения модели. В отличие от случайной неопределённости, эпистемическая неопределённость может быть уменьшена за счёт проведения дополнительных экспериментов, улучшения модели или получения более точных исходных данных. Примерами эпистемической неопределённости являются статистическая неопределённость при малых объёмах выборки, неполная информация о параметрах модели или неопределённость концептуальной модели (например, при выборе диаграмм деформирования или упрощённых граничных условий). Для учёта эпистемической неопределённости применяются Байесовские методы обновления параметров, расширение выборки экспериментальных данных и уточнение численных моделей. Цель верификации и валидации – минимизация эпистемической составляющей до уровня, обеспечивающего стабильность и предсказуемость результатов моделирования.

Погрешности (англ. *errors*) представляют собой *признанные недостатки, возникающие вследствие намеренных упрощений или ограничений численной модели*. Погрешности являются неизбежным элементом любой вычислительной модели и поддаются количественной оценке. Основные источники погрешностей включают влияние дискретизации (погрешность сетки метода конечных элементов), упрощённые диаграммы деформирования материалов, линейные или идеализированные граничные условия и ограничения выбранных конститутивных моделей. Верификация модели направлена на выявление и оценку погрешностей путём анализа сходимости, применения апостериорных оценок точности и сравнения решений разных уровней моделирования. Цель верификации и валидации – уменьшение погрешности до приемлемого уровня и учёт её влияния на итоговые результаты расчётов.

Ошибки (англ. *mistakes*) представляют собой *признанные недостатки, не связанные ни со случайной, ни с эпистемической не-*

определённостью, ни с преднамеренными упрощениями. Они возникают вследствие человеческого фактора или организационных нарушений и не являются частью модели в строгом смысле. Примерами ошибок служат некорректный ввод исходных данных, опечатки в значениях свойств материалов, ошибочное задание граничных условий или использование неверных единиц измерения. Ошибки должны быть полностью исключены на этапе верификации посредством процедур контроля качества, независимо проведённых расчётов, экспертной оценки, автоматизированных проверок и т. д. В отличие от неопределённости, ошибки не подлежат вероятностному учёту.

Предложенная классификация позволяет систематизировать процессы верификации и валидации компьютерных численных моделей и обеспечивает основу для выбора методов их количественного учёта. Отделение ошибок и погрешностей от случайных и эпистемических неопределённостей позволяет корректно формировать вероятностные модели, определять вклад различных источников в общую вариабельность результата и обеспечивать требуемый уровень достоверности расчётных моделей при проектировании стальных конструкций.

Выводы

1. Разработана и систематизирована комплексная методика верификации и валидации имитационных моделей для строительных конструкций, объединяющая терминологическую базу, этапы разработки модели и практические процедуры оценки точности. Процедуры верификации и валидации являются обязательной частью жизненного цикла численных моделей строительных конструкций и обеспечивают доказательную достоверность и точность инженерных расчётов.

2. Верификация программного обеспечения должна включать тестирование алгоритмов и апостериорную оценку численных погрешностей. Верификация численной модели направлена на определение влияния параметров дискретизации и численных схем на точность решений. Установлено, что верификация численной модели должна выполняться на основе анализа сходимости (например, с использованием экстраполяции Ричардсона) и предшествовать валидации.

3. Валидация должна проводиться путём сравнения с экспериментальными или аналитическими эталонными данными с обязательным определением статистических метрик μ_e и V_e . Доказано, что для эффективной валидации новых конструктивных решений и получения статистически значимых оценок точности необходимо не менее четырёх экспериментальных результатов. Наиболее целесообразным является проведение от четырёх до шести валидационных экспериментов.

4. Верификация должна обязательно предшествовать валидации. Без проведения верификации любое расхождение между моделью и экспериментом невозможно однозначно отнести либо к ошибкам численной реализации (зона верификации), либо к неадекватности концептуальной модели (зона валидации). Это может привести к ложным выводам и некорректной калибровке модели.

5. Байесовский подход к уточнению параметров позволяет адаптивно повышать достоверность статистических характеристик меры точности по мере накопления данных и уменьшать неопределённость.

6. Обоснована необходимость количественной оценки неустраняемых (изменчивость свойств) и устранимых (статистическая, концептуальная) неопределённостей, так и погрешностей для последующего учёта их влияния на расчётные значения несущей способности. Неопределённости в большей мере влияют на стандартное отклонение меры точности, а погрешности на среднее значение меры точности (преимущественно систематическая погрешность).

7. Для эффективной и достоверной верификации и валидации сложных систем рекомендован структурированный иерархический подход «от простого к сложному». Последовательная валидация на возрастающих уровнях детализации (компонент → элемент → узел → система) является методически обоснованной, так как позволяет:

- локализовать источники погрешностей и неадекватности модели;
- поэтапно накапливать базу знаний и проверенных подмоделей;
- снизить стоимость верификации и валидации, повторно используя валидированные модели компонентов на более высоких уровнях иерархии.

Разработка отечественного стандарта верификации и валидации, аналогичного ASME V&V 10-2006, с включением количественных критериев точности, является необходимым условием перехода к проектированию на основе численных моделей. Перспективой дальнейших исследований является создание стандартизированных баз данных тестовых задач для верификации и эталонных экспериментальных данных для валидации моделей типовых строительных конструкций и узлов, что повысит воспроизводимость расчётов, доверие к результатам моделирования и общий уровень безопасности строительных конструкций. Дальнейшее развитие этого направления неразрывно связано с общими трендами в области вычислительных методов, подробно рассмотренными в обзорной работе Krzywanski et al. [27]. Авторы отмечают, что современное моделирование сложных систем всё чаще опирается не только на классические численные методы (например, МКЭ), но и на их симбиоз с методами искусственного интеллекта (ИИ).

Список цитированных источников

1. Graciano, C. Steel plate girder webs under combined patch loading, bending and shear / C. Graciano, A. Ayestarán // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2013. – Vol. 80. – P. 202–212. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2012.09.018.
2. Pilot numerical analysis of resistance of steel beams under combined shear and patch loading / V. Nadolski, J. Markova, V. Podymako, M. Sykora // *Proceedings of conference Modelling in Mechanics 2022, Ostrava, 26–27 May 2022*. – Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Civil Engineering. – 2022. – P. 21–29. – DOI: 10.35181/tces-2023-0003.
3. Надольский, В. В. Оценка несущей способности стальной балки методом конечных элементов при совместном действии локальных и сдвиговых усилий / В. В. Надольский, В. И. Подымако // *Строительство и реконструкция*. – 2022. – № 2 (100). – С. 26–43. – DOI: 10.33979/2073-7416-2022-100-2-26-43.
4. Sinur, F. Moment–shear interaction of stiffened plate girders—Tests and numerical model verification / F. Sinur, D. Beg // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2013. – Vol. 85. – P. 116–129. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2013.03.007.
5. Перельмутер, А. В. Готовы ли мы перейти к нелинейному анализу при проектировании? / А. В. Перельмутер, В. В. Тур // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2017. – Vol. 13, Iss. 3. – P. 86–102.
6. Тур, В. В. Концепция проектирования строительных конструкций на основе численных моделей сопротивления / В. В. Тур, В. В. Надольский // *Строительство и реконструкция*. – 2022. – № 6 (104). – С. 78–90. – DOI: 10.33979/2073-7416-2022-104-6-78-90.
7. Бритов, Г. С. Верификация, валидация и тестирование компьютерных моделей линейных динамических систем / Г. С. Бритов // *Информационно-управляющие системы*. – 2013. – № 2 (63). – С. 75–82.
8. Верификация и валидация компьютерных моделей / А. В. Сальников, М. С. Французов, К. А. Виноградов [и др.] // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2022. – № 9 (750). – С. 100–115. – DOI: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115.
9. Компьютерное моделирование в процессах разработки, производства и обеспечения эксплуатации изделий. Термины и определения : ГОСТ Р 57700.21-2020 ; введ. 01.06.2021. – М. : Стандартинформ, 2020. – 15 с.
10. Oberkampf, W. L. *Verification and Validation in Scientific Computing* / W. L. Oberkampf, C. J. Roy. – Cambridge University Press, 2010. – 767 p.
11. Надольский, В. В. Верификация и валидация компьютерной вычислительной модели для проектирования строительных конструкций / В. В. Надольский // *Вестник Полоцкого государственного университета*. – 2024. – № 2. – С. 42–50.
12. Надольский, В. В. Верификация программного обеспечения для компьютерного вычислительного моделирования / В. В. Надольский // *Архитектурно-строительный комплекс: проблемы, перспективы, инновации : электрон. сб. ст. VI междунар. науч. конф., Новополоцк, 30–31 окт. 2024 г. / Полоц. гос. ун-т им. Евфросинии Полоцкой ; редкол.: Д. Н. Лазовский (председ.) [и др.]*. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т им. Евфросинии Полоцкой. – 2025. – С. 154–158.
13. Надольский, В. В. Статистические характеристики погрешности численных моделей несущей способности для стальных элементов / В. В. Надольский // *Строительство и реконструкция*. – 2023. – № 3 (107). – С. 17–34. – DOI: 10.33979/2073-7416-2023-107-3-17-34.
14. Надольский, В. В. Оценка расчетного значения несущей способности стальных элементов, проектируемых на основе численных моделей / В. В. Надольский // *Вестник МГСУ*. – 2023. – Т. 18, Вып. 3. – С. 367–378. – DOI: 10.22227/1997-0935.2023.3.367-378.
15. Надольский, В. В. Коэффициенты надежности для нелинейных моделей несущей способности балок с гибкой стенкой / В. В. Надольский // *Вестник МГСУ*. – 2023. – Т. 18, Вып. 6. – С. 852–863.
16. Надольский, В. В. Этапы разработки компьютерной вычислительной модели для оценки несущей способности стальных конструкций / В. В. Надольский // *Перспективные направления инновационного развития и подготовки кадров : сб. ст. междунар. науч.-практ. конф., Брест, 31 окт. – 2 нояб. 2024 г. : в 2 ч. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: Н. Н. Шалобыта (гл. ред.) [и др.]*. – Брест : БрГТУ, 2024. – Ч. 2. – С. 271–280.
17. AIAA G-077-1998. *Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations*. – Reston: AIAA, 1998. – Vol. 77. – 19 p.
18. ASME V&V 10-2006. *Guide for verification and validation in computational solid mechanics*. – New York: ASME, 2006.
19. Interaction behaviour of steel I-girders Part I: Longitudinally unstiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai [et al.] // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2014. – Vol. 103. – P. 327–343. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2014.06.018.
20. Борисов, Е. А. Особенности проверки качества программного обеспечения / Е. А. Борисов, А. В. Теплов // *Наука через призму времени*. – 2020. – № 1 (34). – С. 27–29.
21. Караханова, А. А. Рассмотрение принципов проведения тестирования программного обеспечения / А. А. Караханова, А. С. Маликова // *Синергия Наук*. – 2019. – № 41. – С. 264–270.
22. Численное моделирование физических процессов. Термины и определения : ГОСТ Р 57188-2016 ; введ. 01.05.2017. – М. : Стандартинформ, 2016. – 23 с.
23. Roache, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies / P. J. Roache // *Journal of Fluids Engineering*. – 1994. – Vol. 116 (3). – P. 405–413.
24. Соловьёва, А. А. Исследование развития моделей случайных величин в расчетах надежности строительных конструкций при неполной статистической информации / А. А. Соловьёва, С. А. Соловьёв // *Вестник МГСУ*. – 2021. – Т. 16, № 5. – С. 587–607. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.5.587-607.
25. Kala, Z. Sensitivity assessment of steel members under compression / Z. Kala // *Engineering Structures*. – 2009. – Vol. 31. – P. 1344–1348. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.04.001.
26. Nadolski, V. Uncertainty in resistance models for steel members / V. Nadolski, M. Sykora // *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series* – 2014. – Vol. 14. – P. 119–130. – DOI: 10.2478/tvsb-2014-0028.
27. Statistical evaluation of the lateral–torsional buckling resistance of steel I-beams, Part 2: Variability of steel properties / L. Simões da Silva, C. Rebelo, D. Nethercot [et al.] // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2009. – Vol. 65 (4). – P. 832–849. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2008.07.017.
28. *Advanced Computational Methods for Modeling, Prediction and Optimization – A Review* / J. Krzywanski, M. Sosnowski, K. Grabowska [et al.] // *Materials*. – 2024. – Vol. 17. – Art. 3521. – DOI: 10.3390/ma17143251.

References

- Graciano, C. Steel plate girder webs under combined patch loading, bending and shear / C. Graciano, A. Ayestarán // Journal of Constructional Steel Research. – 2013. – Vol. 80. – P. 202–212. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2012.09.018.
- Pilot numerical analysis of resistance of steel beams under combined shear and patch loading / V. Nadolski, J. Markova, V. Podymako, M. Sykora // Proceedings of conference Modelling in Mechanics 2022, Ostrava, 26–27 May 2022. – Ostrava : VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Civil Engineering. – 2022. – P. 21–29. – DOI: 10.35181/tces-2023-0003.
- Nadol'skij, V. V. Ocenka nesushchej sposobnosti stal'noj balki metodom konechnykh elementov pri sovmestnom dejstvii lokal'nyh i sdvigovyh usilij / V. V. Nadol'skij, V. I. Podymako // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. – 2022. – № 2 (100). – S. 26–43. – DOI: 10.33979/2073-7416-2022-100-2-26-43.
- Sinur, F. Moment–shear interaction of stiffened plate girders—Tests and numerical model verification / F. Sinur, D. Beg // Journal of Constructional Steel Research. – 2013. – Vol. 85. – P. 116–129. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2013.03.007.
- Perel'muter, A. V. Gotovy li my perejti k nelinejnomu analizu pri proektirovanii? / A. V. Perel'muter, V. V. Tur // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Vol. 13, Iss. 3. – P. 86–102.
- Tur, V. V. Konceptiya proektirovaniya stroitel'nyh konstrukcij na osnove chislennykh modelej soprotivleniya / V. V. Tur, V. V. Nadol'skij // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. – 2022. – № 6 (104). – S. 78–90. – DOI: 10.33979/2073-7416-2022-104-6-78-90.
- Britov, G. S. Verifikaciya, validaciya i testirovanie komp'yuternykh modelej linejnykh dinamicheskikh sistem / G. S. Britov // Informacionno-upravlyayushchie sistemy. – 2013. – № 2 (63). – S. 75–82.
- Verifikaciya i validaciya komp'yuternykh modelej / A. V. Sal'nikov, M. S. Francuzov, K. A. Vinogradov [i dr.] // Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Mashinostroenie. – 2022. – № 9 (750). – S. 100–115. – DOI: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115.
- Komp'yuternoe modelirovanie v processah razrabotki, proizvodstva i obespecheniya ekspluatatsii izdelij. Terminy i opredeleniya : GOST R 57700.21-2020 ; vved. 01.06.2021. – M. : Standartinform, 2020. – 15 s.
- Oberkampf, W. L. Verification and Validation in Scientific Computing / W. L. Oberkampf, C. J. Roy. – Cambridge University Press, 2010. – 767 p.
- Nadol'skij, V. V. Verifikaciya i validaciya komp'yuternoj vychislitel'noj modeli dlya proektirovaniya stroitel'nyh konstrukcij / V. V. Nadol'skij // Vestnik Polockogo gosudarstvennogo universiteta. – 2024. – № 2. – S. 42–50.
- Nadol'skij, V. V. Verifikaciya programmnogo obespecheniya dlya komp'yuternogo vychislitel'nogo modelirovaniya / V. V. Nadol'skij // Arhitekturo-stroitel'nyj kompleks: problemy, perspektivy, innovacii : elektron. sb. st. VI mezhdunar. nauch. konf., Novopolock, 30–31 okt. 2024 g. / Poloc. gos. un-t im. Evfrosinii Polockoj ; redkol.: D. N. Lazovskij (predsed.) [i dr.]. – Novopolock : Poloc. gos. un-t im. Evfrosinii Polockoj. – 2025. – S. 154–158.
- Nadol'skij, V. V. Statisticheskie karakteristiki pogreshnosti chislennykh modelej nesushchej sposobnosti dlya stal'nykh elementov / V. V. Nadol'skij // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. – 2023. – № 3 (107). – S. 17–34. – DOI: 10.33979/2073-7416-2023-107-3-17-34.
- Nadol'skij, V. V. Ocenka raschetnogo znacheniya nesushchej sposobnosti stal'nykh elementov, proektiruemykh na osnove chislennykh modelej / V. V. Nadol'skij // Vestnik MGSU. – 2023. – T. 18, Vyp. 3. – S. 367–378. – DOI: 10.22227/1997-0935.2023.3.367-378.
- Nadol'skij, V. V. Koefficienty nadezhnosti dlya nelinejnykh modelej nesushchej sposobnosti balok s gibkoj stenkoj / V. V. Nadol'skij // Vestnik MGSU. – 2023. – T. 18, Vyp. 6. – S. 852–863.
- Nadol'skij, V. V. Etapy razrabotki komp'yuternoj vychislitel'noj modeli dlya ocenki nesushchej sposobnosti stal'nykh konstrukcij / V. V. Nadol'skij // Perspektivnye napravleniya innovacionnogo razvitiya i podgotovki kadrov : sb. st. mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 31 okt. – 2 noyab. 2024 g. : v 2 ch. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: N. N. SHalobyta (gl. red.) [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2024. – CH. 2. – S. 271–280.
- AIAA G-077-1998. Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations. – Reston : AIAA, 1998. – Vol. 77. – 19 p.
- ASME V&V 10-2006. Guide for verification and validation in computational solid mechanics. – New York : ASME, 2006.
- Interaction behaviour of steel I-girders Part I: Longitudinally unstiffened girders / B. Kövesdi, J. Alcaine, L. Dunai [et al.] // Journal of Constructional Steel Research. – 2014. – Vol. 103. – P. 327–343. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2014.06.018.
- Borisov, E. A. Osobennosti proverki kachestva programmnogo obespecheniya / E. A. Borisov, A. V. Teplov // Nauka cherez prizmu vremeni. – 2020. – № 1 (34). – S. 27–29.
- Karahanova, A. A. Rassmotrenie principov provedeniya testirovaniya programmnogo obespecheniya / A. A. Karahanova, A. S. Malikova // Sinergiya Nauk. – 2019. – № 41. – S. 264–270.
- CHislennoe modelirovanie fizicheskikh processov. Terminy i opredeleniya : GOST R 57188-2016 ; vved. 01.05.2017. – M. : Standartinform, 2016. – 23 s.
- Roache, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies / P. J. Roache // Journal of Fluids Engineering. – 1994. – Vol. 116 (3). – P. 405–413.
- Solov'eva, A. A. Issledovanie razvitiya modelej sluchajnykh velichin v raschetah nadezhnosti stroitel'nyh konstrukcij pri nepolnoj statisticheskoj informacii / A. A. Solov'eva, S. A. Solov'ev // Vestnik MGSU. – 2021. – T. 16, № 5. – S. 587–607. – DOI: 10.22227/1997-0935.2021.5.587-607.
- Kala, Z. Sensitivity assessment of steel members under compression / Z. Kala // Engineering Structures. – 2009. – Vol. 31. – P. 1344–1348. – DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.04.001.
- Nadolski, V. Uncertainty in resistance models for steel members / V. Nadolski, M. Sykora // Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series – 2014. – Vol. 14. – P. 119–130. – DOI: 10.2478/tvsb-2014-0028.
- Statistical evaluation of the lateral–torsional buckling resistance of steel I-beams, Part 2: Variability of steel properties / L. Simões da Silva, C. Rebelo, D. Nethercot [et al.] // Journal of Constructional Steel Research. – 2009. – Vol. 65 (4). – P. 832–849. – DOI: 10.1016/j.jcsr.2008.07.017.
- Advanced Computational Methods for Modeling, Prediction and Optimization – A Review / J. Krzywanski, M. Sosnowski, K. Grabowska [et al.] // Materials. – 2024. – Vol. 17. – Art. 3521. – DOI: 10.3390/ma17143251.

Материал поступил 12.02.2026, одобрен 15.02.2026, принят к публикации 17.02.2026