

УДК 624.04

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ И ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ

К. К. Глушко¹, К. А. Глушко²

¹ К. т. н., доцент кафедры архитектуры, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: const.hlushko@gmail.com

² К. т. н., доцент, доцент кафедры природообустройства, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь

Реферат

При проектировании каркасных зданий часто возникает необходимость оценки устойчивости сжатых стержней, имеющих переменную высоту поперечного сечения, что обусловлено различными значениями внутренних усилий в таких элементах. При проведении реконструкции существующих зданий нередко возникает необходимость оценки запасов несущей способности примененных ранее строительных конструкций, проектирования подобных им новых при необходимости замены. При этом нередко виды конструкций, применявшихся ранее, не имеют современных аналогов, и, как следствие, отсутствуют какие-либо рекомендации к оценке их устойчивости как в современной научной и справочной литературе, так и в современных нормативных документах.

В настоящей статье представлено решение задачи потери устойчивости центрально сжатого стержня с переменной высотой поперечного сечения путем решения дифференциального уравнения продольного изгиба. Решение названной задачи выполнено с использованием метода конечных разностей, в котором используется последовательное уточнение формы изогнутой оси стержня. Примененный метод позволяет отказаться от использования функций Бесселя для задач подобного рода и дает возможность представить решение дифференциальных уравнений как системы линейных алгебраических уравнений, что приводит к некоторому упрощению процесса поиска коэффициентов расчетных длин. При этом уделено внимание на точность полученного приближенного решения путем экстраполяции производных разных порядков и произведено сравнение погрешности их вычисления с погрешностью округления при расчете. Полученные результаты представлены в виде графиков зависимости коэффициента расчетной длины от соотношения моментов инерции поперечных сечений на концах стержня.

Ключевые слова: устойчивость, жесткость, производная, коэффициент расчетной длины, критическая сила.

STABILITY OF CENTRALLY COMPRESSED RODS WITH A RECTANGULAR CROSS-SECTION OF CONSTANT WIDTH AND VARIABLE HEIGHT

K. K. Hlushko, K. A. Hlushko

Abstract

When designing frame buildings, it is often necessary to assess the stability of compressed bars with variable cross-sectional heights, which is due to the different values of internal forces in such elements. When renovating existing buildings, it is often necessary to assess the load-bearing capacity of previously used building structures and to design new ones similar to them if replacement is necessary. At the same time, the types of structures used previously often have no modern analogues, and as a result, there are no recommendations for assessing their stability in modern scientific and reference literature or in modern regulatory documents.

This article presents a solution to the problem of stability loss in a centrally compressed rod with a variable cross-sectional height by solving the differential equation of longitudinal bending. The solution to this problem was performed using the finite difference method, which involves sequential refinement of the shape of the curved axis of the rod. The method used makes it possible to dispense with the use of Bessel functions for problems of this kind and allows the solution of differential equations to be represented as a system of linear algebraic equations, which leads to a certain simplification of the process of finding the coefficients of the calculated lengths. At the same time, attention is paid to the accuracy of the approximate solution obtained by extrapolating derivatives of different orders, and a comparison is made of the errors.

Keywords: stability, rigidity, derivative, effective length coefficient, critical force.

Введение

Впервые решение задачи устойчивости стержней переменной жесткости, изменяющейся по степенному закону, было представлено А. Н. Динником [1], получившим точное решение дифференциального уравнения продольного изгиба с использованием функций Бесселя. При этом были рассмотрены различные способы закрепления концов стержней и различные законы изменения форм поперечных сечений. Методом последовательных приближений задача устойчивости шарнирно опертого по концам стержня была решена С. П. Тимошенко [2]. В последствии разработкой методов решения задачи устойчивости стержней переменного сечения, изгибная жесткость которых изменяется по линейному закону, занимался А. Р. Ржаницын, Ф. Блейх, С. Д. Лейтес [3–5]. Следует отметить, что результаты решения рассматриваемой задачи, полученные А. Н. Динником сложно применять на практике, рассмотренные А. Р. Ржаницыным задачи касались устойчивости шарнирно опертых стержней и стержней, один из концов зашцеplen, а другой свободен. При рассмотрении более сложных случаев устойчивости стержней переменного сечения описанные подходы имеют еще большую трудоемкость решения дифференциального

уравнения интерпретации результатов на основе полученного решения. С этим обстоятельством связано развитие решений представленной задачи при помощи численных методов.

Авторами работ [6–9] при помощи метода конечных разностей были получены величины критических нагрузок на стержни переменного сечения различного типа и способов закрепления концов. Следует отметить, что в упомянутых работах недостаточное внимание уделено обоснованию достаточности дискретизации стержня на отдельные участки для вычисления численных производных, за исключением работы [7–14], где был использован метод экстраполяции Ричардсона [7] и Рунге – Ромберга [10, 14]. Решение подобной задачи представлено в работе [15], в которой так же отмечено, что полученное решение требует уточнения.

Теоретические предпосылки построения метода оценки потери устойчивости стержня

В представленной работе решение задачи устойчивости центрально сжатого стержня переменного сечения представлено с использованием метода конечных разностей. Целью работы является

Строительство

<https://doi.org/10.36773/1818-1112-2026-139-1-35-42>

определение коэффициента расчетной длины стержня для нахождения критической силы с использованием формулы Эйлера. Размеры поперечных сечений стержней изменяются по линейному закону от вершины (имеет меньшие размеры поперечного сечения) до основания с большими поперечными размерами. Уравнение продольного изгиба центрально сжатого стержня может быть описано при помощи уравнения второго порядка

$$EI(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0, \quad (1)$$

разделив которое на $EI(x)$ и продифференцировав дважды, можно перейти к его следующему виду:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k_{\min}^2 \left(w \frac{J_2(\xi)}{L^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{1}{J(\xi)} - \frac{dw}{dx} \frac{J_1(\xi)}{L} \right) = 0; \quad (2)$$

$$k_{\min}^2 = \frac{-N}{EI_{\min}}, \quad (3)$$

где E – модуль упругости стержня, Па; $N = -P$ – величина продольной силы при сжатии стержня, Н, $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня в точке с координатой x , w – безразмерные поперечные перемещение оси стержня, x – текущая координата в продольном направлении, м, P – усилие сжатия в стержне, Н, численно равно распуру на его концах, L – длина стержня, м; $J(\xi)$ – закон изменения момента инерции поперечного сечения стержня, $\xi = x/L$ – безразмерная ордината, отношение момента инерции произвольного поперечного сечения к минимальному моменту инерции; выражения для определения $J_1(\xi)$, $J_2(\xi)$ приведены ниже.

$$J_1(\xi) = \frac{2}{J^2(\xi)} \frac{dJ(\xi)}{d\xi}, \quad (4)$$

$$J_2(\xi) = \frac{2}{J^3(\xi)} \left(\frac{d^2 J(\xi)}{d\xi^2} \right)^2 - \frac{d^2 J(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{J^2(\xi)}, \quad (5)$$

в свою очередь $w = v/v_{\max}$ – относительная величина перемещения оси стержня в точке с координатой x , безразмерная величина.

Уравнение (1) в некоторых случаях имеет точное решение [21]. Так, например, впервые задача устойчивости конического и пирамидального заземленного стержня с одной стороны и свободного с другой была решена Л. Эйлером в 1728 году. А. Н. Динник [1] при точном решении стержня с линейным изменением момента инерции поперечного сечения по длине использовал функции Бесселя, применение которых в инженерных расчетах часто вызывает сложности.

Рассматриваемый стержень с непрерывным изменением жесткости по длине можно приближенно заменить на стержень со ступенчатым изменением жесткости, разделив его на несколько участков по длине и принимая усредненную жесткость для каждого участка. Для каждого рассматриваемого участка необходимо составлять уравнения типа (1), принимая жесткость постоянной, при этом необходимо вводить дополнительные дифференциальные уравнения,

которые описывают равенство углов поворота концов каждого из рассматриваемых соединяющихся участков. Данный подход был применен С. П. Тимошенко [2] для решения задачи устойчивости стержня со ступенчатым изменением жесткости. Недостаток данного подхода для решения задачи устойчивости стержня с непрерывным изменением жесткости – удвоенное количество уравнений при фиксированной кратности разбиения стержня на ступенчатые участки по длине (одна половина уравнений описывает продольный изгиб, вторая описывает равенство углов поворота концов участков стержней). Применение такого подхода при более чем трехкратном делении стержня на участки со ступенчатым изменением жесткости вызывает сложности для его практического использования.

Описываемый в представленной работе подход с введением функции изменения жесткости по длине $J(\xi)$ и производных от нее выражений (4) и (5) позволяет избавиться от осреднения жесткости стержня в узлах конечно-разностной сетки, в этом случае применяются их истинные значения жесткости.

Основные допущения, принятые при расчете:

- 1) соблюдается упругое деформирование материала стержня;
- 2) влиянием поворота поперечных сечений стержня на закон распределения продольной силы в нем можно пренебречь;
- 3) влиянием сдвига при определении поперечных деформаций стержня можно пренебречь.

Представляя функцию изогнутой оси стержня в общем случае неизвестной, можно произвести аппроксимацию ее второй и четвертой производных для средних точек, используя метод конечных разностей, принимая второй порядок точности [6, 7].

$$w_i'' = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2}; \quad (6)$$

$$w_i^{IV} = \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{h^4}, \quad (7)$$

где $h = L/n$ – расстояние между соседними точками по длине стержня, м;

n – количество участков разбиения.

При разбиении стержня на n участков следует вычислить производные, входящие в уравнение (1), для $n + 1$ точки, в то время как производные по формуле (6) могут быть вычислены для $n-3$ точек, поскольку производные изогнутой оси стержня в первых двух, последней и предпоследней точках будут содержать несуществующие значения (законтурные точки). Для исключения этого явления для данной задачи используется полином Лагранжа. Таким образом уравнения продольного изгиба для названных точек исключаются и заменяются на запись из граничных условий. Чтобы применять численные производные в начальной и конечной точке на оси стержня одного порядка точности, следует использовать интерполяционный полином Лагранжа для вычисления значений функции изогнутой оси в безразмерных ординатах по шести точкам и записать его производные

$$L(x) = \sum_{i=0}^n w_i l_i(x), \quad (8)$$

где

$$l(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_i - x_{j+1}} \cdot \frac{x - x_{j+2}}{x_i - x_{j+2}} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}; \quad (9)$$

$$\frac{\Delta w_0}{h} = \frac{1}{h} \left(-\frac{137}{60} w_0 + 5w_1 - 5w_2 + \frac{10}{3} w_3 - \frac{5}{4} w_4 + \frac{1}{5} w_5 \right); \quad (10)$$

$$\frac{\Delta^2 w_0}{h^2} = \frac{1}{12h^2} (45w_0 - 154w_1 + 214w_2 - 156w_3 + 61w_4 - 10w_5); \quad (11)$$

$$\frac{\Delta^3 w_0}{h^3} = \frac{1}{4h^3} (17w_0 + 71w_1 - 118w_2 + 98w_3 - 41w_4 + 7w_5); \quad (12)$$

$$\frac{\Delta w_n}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{137}{60} w_n - 5w_{n-1} + 5w_{n-2} - \frac{10}{3} w_{n-3} + \frac{5}{4} w_{n-4} - \frac{1}{5} w_{n-5} \right); \quad (13)$$

$$\frac{\Delta^2 w_n}{h^2} = \frac{1}{12h^2} (45w_n - 154w_{n-1} + 214w_{n-2} - 156w_{n-3} + 61w_{n-4} - 10w_{n-5}). \quad (14)$$

Также функцию изогнутой оси $w(x)$ следует заменить формой изогнутой оси $Y(x)$. Для дальнейших вычислений нужно записать следующее приближенное равенство на основе уравнения (2), переходя от дифференциалов к конечным разностям.

$$\Delta^4 w = -u^2 \left(Y \frac{J_2(\xi)}{n^4} + \frac{\Delta^2 Y}{n^2} \cdot \frac{1}{J(\xi)} - \Delta Y \frac{J_1(\xi)}{n^3} \right), \quad (15)$$

где

$$u^2 = \frac{-NL^2}{EI_{\min}}. \quad (16)$$

В качестве граничных условий приняты следующие условия закрепления концов:

- 1) оба конца имеют шарнирные опоры;
- 2) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен;
- 3) конец стержня с большими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен;
- 4) оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении;
- 5) скользящая заделка на конце стержня с меньшими размерами поперечного сечения;

$$[Z] = - \left(\frac{1}{n^4} [J_2(\xi_i)] \cdot [Y1] + \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right] \cdot [\Delta^2 Y1] - \frac{1}{n^3} [J_1(\xi_i)] \cdot [\Delta Y1] \right), \quad (19)$$

где, в свою очередь, $[J_2(\xi_i)]$ – квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – аргументы функции (5);

$$\left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right] - \text{квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – обратные значения функции закона изменения момента инерции поперечного сечения стержня;}$$

$[J_1(\xi_i)]$ – квадратная диагональная матрица, ненулевые члены которой – аргументы функции (4);

$[Y1], [\Delta Y1], [\Delta^2 Y1]$ – векторы значений функции формы изогнутой оси стержня, ее первой и второй конечной разности, в которых первые два и последние два элемента являются значениями правой части граничных условий задачи.

Следует также отметить, что представление исходного уравнения (2) в разностном виде (15) обладает свойством консервативности. Определение вектора значений функции изогнутой оси стержня $[w]$ осуществляется при решении системы линейных уравнений в матричном виде (19).

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & -154 & 214 & -156 & 61 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 61 & -156 & 214 & -156 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (22)$$

$[Y]$ – вектор ординат формы функции изогнутой оси в каждой точке, и векторы $[Y1], [\Delta Y1], [\Delta^2 Y1]$, составленные на его основе;

6) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлен.

Для описанных двух последних случаев граничные условия свободного конца стержня будут иметь вид

$$\Delta^3 w = -u^2 \left(\frac{1}{J(\xi)} \cdot \frac{\Delta Y}{n^2} - \frac{Y}{n^3} \cdot \frac{J'(\xi)}{J^2(\xi)} \right), \quad (17)$$

где $J'(\xi)$ – производная закона изменения момента инерции поперечного сечения стержня.

Составляя уравнения (15) для средних точек и граничные условия для крайних, можно составить следующее равенство:

$$[A] \cdot [w] = u^2 [Z], \quad (18)$$

где $[A]$ – матрица из коэффициентов при неизвестных значениях безразмерных ординат w_i , которая принимает вид при отсутствии заземления на концах;

$[w]$ – вектор неизвестных безразмерных ординат функции изогнутой оси в каждой точке;

$[Z]$ – вектор значений производных формы $Y_i = Y(x_i)$ изогнутой оси и момента инерции $I(x_i)$ в тех же точках.

$$[w] = u^2 [A]^{-1} [Z]. \quad (20)$$

При решении этого уравнения удобно принять $u^2 = 1$ с последующей нормализацией вектора $[w]$ для подстановки его значений на место аналогичного вектора $[Y]$ – процесс вычисления вектора $[w]$ является итерационным, при этом вектор значений $[Y]$ задается изначально, его значения не должны быть линейно зависимыми. Равенство (15) только в том случае будет справедливым, когда вектор значений формы $[Y]$ приблизится к нормализованному вектору значений функции $[w]$. Производя процесс решения уравнения (15) путем последовательных приближений и заменяя вектор $[Y]$ на нормализованный вектор $[w]$, можно в итоге построить график формы изогнутой оси стержня при продольном изгибе. Величина коэффициента расчетной длины стержня в этом случае может быть определена из следующего выражения:

$$\mu = \pi \sqrt{W_{i,\max}}, \quad (21)$$

где $W_{i,\max}$ – максимальное по величине значение элемента *не нормализованного* вектора безразмерных ординат $[w]$, поскольку обратная его величина является коэффициентом пропорциональности между правой и левой частью уравнения (18).

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \\ Y_{10} \end{bmatrix}, \quad [Y1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\Delta Y1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_3 - Y_1 \\ Y_4 - Y_2 \\ Y_5 - Y_3 \\ Y_6 - Y_4 \\ Y_7 - Y_5 \\ Y_8 - Y_6 \\ Y_9 - Y_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\Delta^2 Y] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_1 - 2Y_2 + Y_3 \\ Y_2 - 2Y_3 + Y_4 \\ Y_3 - 2Y_4 + Y_5 \\ Y_4 - 2Y_5 + Y_6 \\ Y_5 - 2Y_6 + Y_7 \\ Y_6 - 2Y_7 + Y_8 \\ Y_7 - 2Y_8 + Y_9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

диагональные матрицы значений $\left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right]$, $[J_1(\xi_i)]$, $[J_2(\xi_i)]$:

$$\left[\frac{1}{J(\xi_i)} \right] = \begin{bmatrix} J^{-1}(\xi_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1}(\xi_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1}(\xi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J^{-1}(\xi_{10}) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$[J_1(\xi_i)] = \begin{bmatrix} J_1(\xi_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(\xi_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\xi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_1(\xi_{10}) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$[J_2(\xi_i)] = \begin{bmatrix} J_2(\xi_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\xi_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2(\xi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2(\xi_{10}) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Представленный пример, безусловно, имеет ограниченное применение ввиду недостаточно частого разбиения стержня по длине и введен исключительно для наглядности из-за своей компактности.

Матрица (22) не является симметричной относительно главной диагонали, поскольку первые две строки и последние две строки являются формулировкой граничных условий не при помощи разностных производных, взятых вперед или назад, а при помощи интерполяционного полинома Лагранжа ввиду большей точности получаемого решения. Схема записи элементов матрицы типа (22) представлена ниже.

$$[A] = \begin{matrix} \text{Область граничных условий (2 строки)} \\ \begin{matrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{matrix} \\ \text{Область граничных условий (2 строки)} \end{matrix} \quad (27)$$

При решении задач подобного рода с применением разностных методов возникает вопрос о точности произведенного решения и достаточности дискретизации стержня по длине. Одним из подходов, применяемых для уточнения значений производных, является метод экстраполяции значений численных производных. При решении задачи устойчивости стержня переменной жесткости в работе [6] был применен метод экстраполяции Ричардсона. В представленной же работе также применен метод экстраполяции Рунге – Ромберга [8, 10, 16–18] не с целью уточнения величин численных производных, а с целью поиска такой кратности разбиения стержня по длине n , при котором величина экстраполированного приращения производной была бы сопоставима с погрешностью округления. Расчет стержней на устойчивость производился с числом участков разбиения стержня по длине $n = 6, 12, 25, 50$. При этом погрешность вычисления производных второго порядка точности уменьшалась в 4, 17 и 70 раз. Оценка погрешности первой производной функции изогнутой оси по методу Рунге – Ромберга произведена с использованием следующей формулы:

$$O = \frac{w_{h/2} - w_h}{3}, \quad (28)$$

где $w_{h/2}$ – численная производная функции изогнутой оси, определенная с использованием дробного (уменьшенного вдвое) шага; w_h – то же, с использованием принятого шага.

Оценка погрешности стержней численных производных производилась путем последовательного дифференцирования первой производной.

Ввиду применения безразностных производных на концах стержней при формировании граничных условий был применен интерполяционный полином Лагранжа (формулы (8), (9), и его производные (10)–(14)). Число узлов сетки принималось равным от двух до шести, при этом последовательно уменьшалась погрешность интерполяции. Следует отметить, что для различных способов закрепления концов стержня применялась различная кратность разбиения стержня по длине.

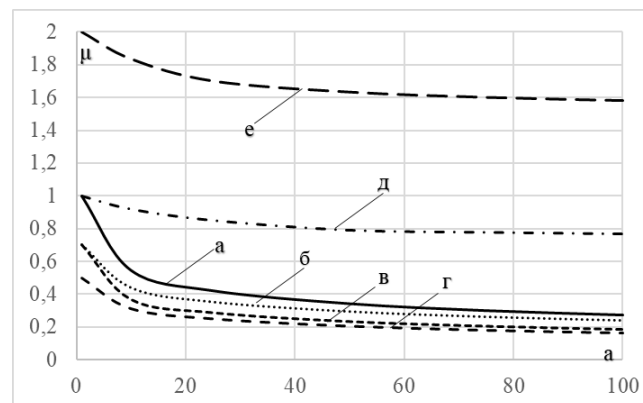
Представленный подход был реализован для решения задач устойчивости стержней прямоугольного поперечного сечения. В таблице 1 приведены формулы законов изменения величин моментов инерции поперечных сечений по длине стержня, приняв за f отношение максимального и минимального размеров поперечных сечений.

На рисунке 1 представлены графики изменения коэффициентов расчетных длин стержней для рассмотренных выше способов закрепления концов.

На рисунке 2 представлены графики изменения ординат безразмерных прогибов стержней переменного сечения при потере их устойчивости (функция-форма продольного изгиба), при этом принято соотношение максимального момента инерции стержня к минимальному равным $a = f^3$.

Таблица 1 – Формулы законов изменения величин моментов инерции поперечных сечений и их производных

Определяемый параметр	Прямоугольное поперечное сечение
$J(\xi)$	$(1 + \xi(f-1))^3$
$J_1(\xi)$	$\frac{6(f-1)}{(1 + \xi(f-1))^4}$
$J_2(\xi)$	$\frac{12(f-1)^2}{(1 + \xi(f-1))^5}$

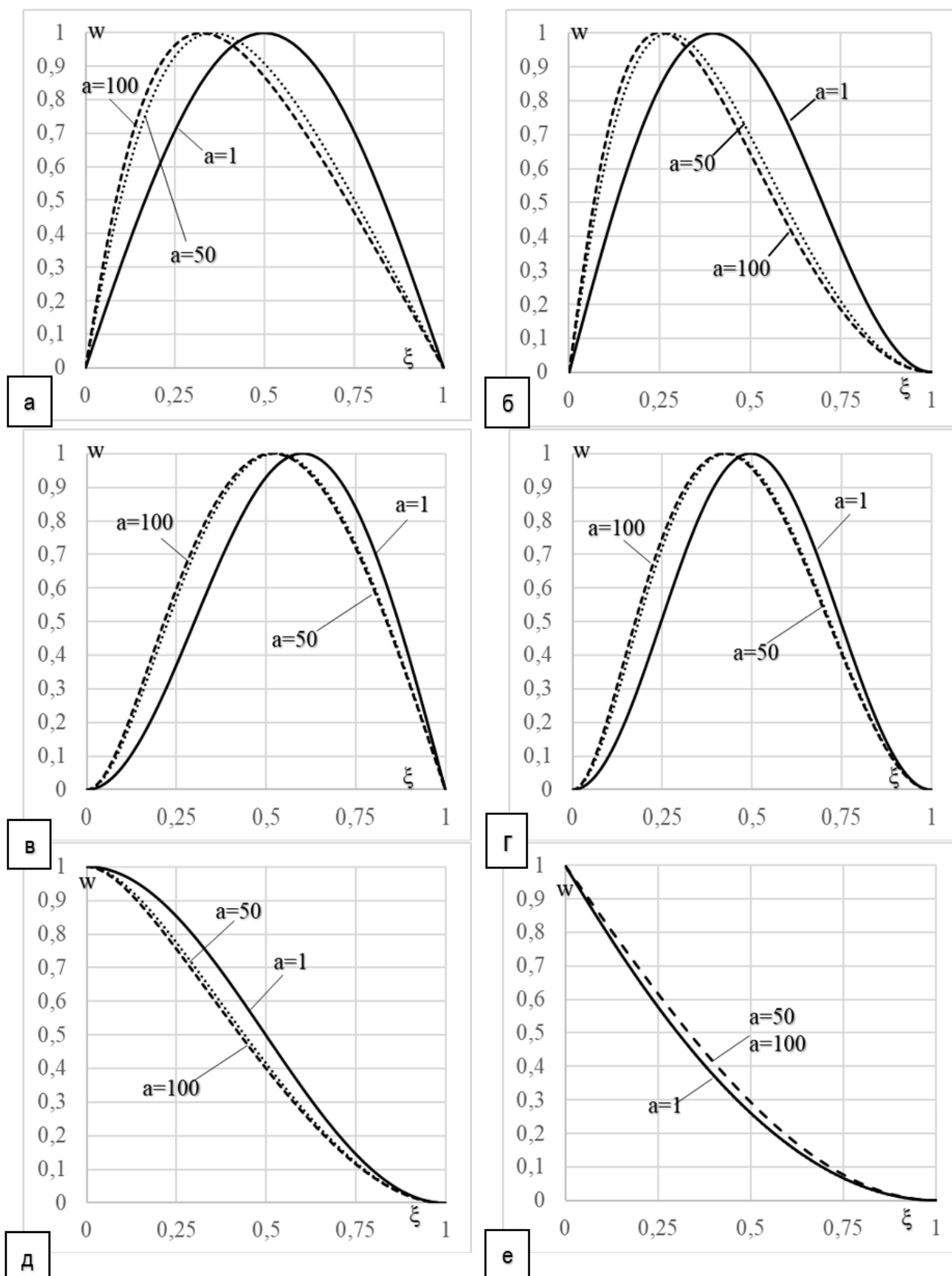


а) оба конца имеют шарнирные опоры; б) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен; в) конец стержня с большими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен; г) оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении; д) скользящая заделка на конце стержня с меньшими размерами поперечного сечения другой конец защемлен неподвижно; е) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлен

Рисунок 1 – Коэффициенты расчетных длин стержней переменного поперечного сечения при продольном изгибе

Используя графики изменения расчетных длин, проверку устойчивости центрально сжатых стержней переменного поперечного сечения с линейным изменением его размеров по длине можно производить при помощи формулы Эйлера [19, 20], принимая для расчета момент инерции поперечного сечения узкого конца стержня в рассматриваемой плоскости изгиба.

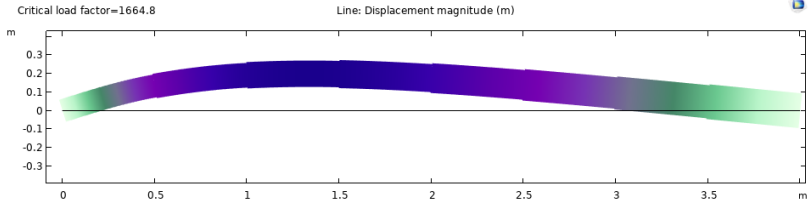
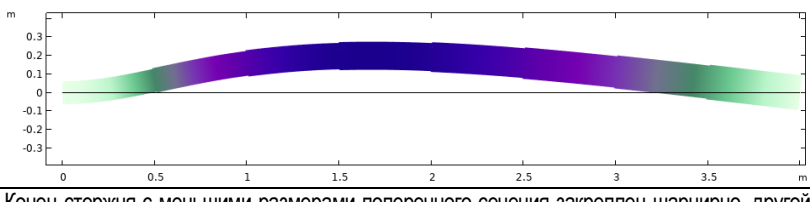
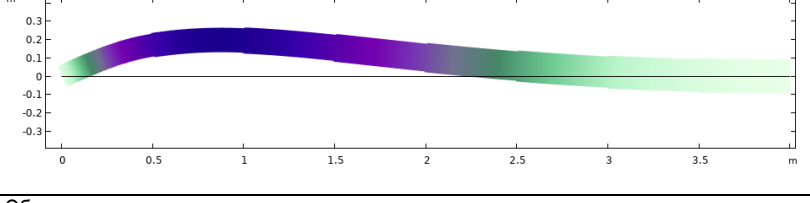
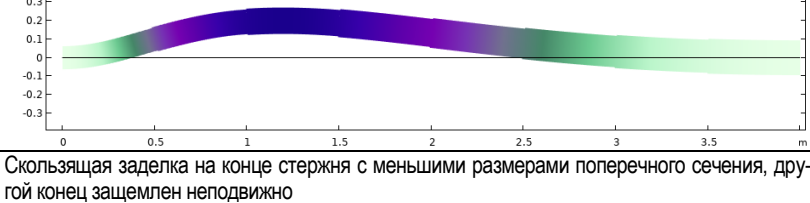
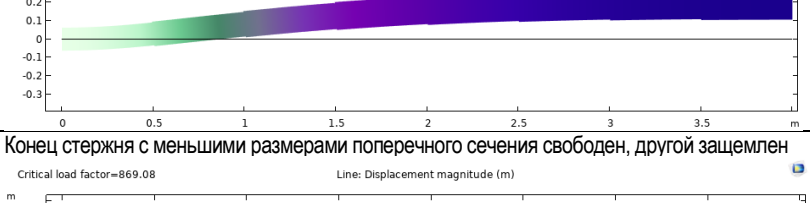
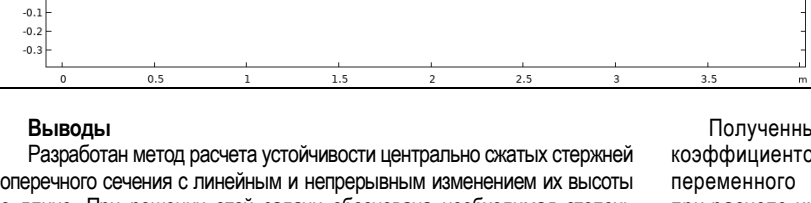
Было произведено сравнение полученного решения с результатами расчета устойчивости стержней переменного поперечного сечения в программном комплексе Comsol Multiphysics. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, размеры поперечных сечений в верхней части 4×20 см, в нижней части $18,56 \times 20$ см, соотношение линейных размеров высоты $f = 4,641$, соотношение моментов инерции поперечного сечения $a = 100$, длина стержня 4 м. Каждый стержень разделен на восемь участков по длине, каждый из них имел постоянную изгибную жесткость, соответствующую среднему сечению. При рассмотренных выше условиях закрепления концов стержней результаты, полученные в программном комплексе Comsol Multiphysics, отличаются от полученных с помощью изложенного выше расчета менее 10 %. Ниже, в таблице 2 приведены результаты расчета величин критических сил и характерные изогнутые формы стержней в Comsol Multiphysics и сравнены с величинами критических сил по предложенному выше методу. Несмотря на малое отличие величин критических нагрузок, применение изложенного в работе метода позволяет быстро оценить величину критической нагрузки при помощи графиков, изображенных на рисунке 1, чем с использованием программных комплексов.



а) оба конца имеют шарнирные опоры; б) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен; в) конец стержня с большими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен; г) оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении; д) скользящая заделка на конце стержня с меньшими размерами поперечного сечения; е) конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлен

Рисунок 2 – Характерные кривые функции-формы стержней переменного поперечного сечения при продольном изгибе

Таблица 2 – Изогнутые формы стержней и величины критических нагрузок

Характерные изогнутые формы стержней	Величины критических сил, кН		Расхождение, %
	Определенные в Comsol Multiphysics	Вычисленные	
Шарнирное закрепление обоих концов 	1664,8	1813,88	8,26
Конец стержня с большими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен 	3636,5	4037	9,94
Конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения закреплен шарнирно, другой защемлен 	2828,6	2595,3	8,99
Оба конца стержня защемлены и неподвижны в поперечном направлении 	5771,5	5137,61	12,31
Скользящая заделка на конце стержня с меньшими размерами поперечного сечения, другой конец защемлен неподвижно 	2033,8	2342,64	9,87
Конец стержня с меньшими размерами поперечного сечения свободен, другой защемлен 	869,8	863,59	0,63

Выводы

Разработан метод расчета устойчивости центрально сжатых стержней поперечного сечения с линейным и непрерывным изменением их высоты по длине. При решении этой задачи обоснована необходимая степень дискретизации стержня при помощи экстраполяции производных.

Полученные результаты в виде графиков изменения коэффициентов расчетных длин центрально сжатых стержней переменного поперечного сечения рекомендуется применять при расчете их на устойчивость в составе остова проектируемых и эксплуатируемых зданий.

Список цитированных источников

1. Динник, А. Н. Продольный изгиб. Кручение / А. Н. Динник. – М. : АН СССР, 1955. – 392 с.
2. Тимошенко, С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко ; под ред. В. З. Власова. – М. : ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. – 532 с.
3. Ржаницын, А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А. Р. Ржаницын. – М. : Гостехиздат, 1955. – 475 с.
4. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций : пер. с англ. / Ф. Блейх – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1959. – 544 с.
5. Лейтес, С. Д. Устойчивость сжатых стальных стержней / С. Д. Лейтес. – М. : Госстройиздат, 1954. – 312 с.
6. Newmark, N. M. Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads / N. M. Newmark // ASCE Transactions. – 1943. – No. 2202. – Vol. 108. – P. 1161–1234.
7. Salvadori, M. G. Numerical computation of buckling loads by finite differences / M. G. Salvadori // ASCE Transactions. – 1951. – Vol. 116. – P. 590–624.
8. Глушко, К. К. Численный анализ устойчивости центрально сжатых стальных винтов в деревянных конструкциях / К. К. Глушко, Е. В. Маркечко // Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР) : сб. ст. Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 27 марта 2020 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. М. Семенюк [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2020. – С. 31–38.
9. Найчук, А. Я. Устойчивость стальных центрально сжатых винтов в массиве древесины / А. Я. Найчук, К. К. Глушко, Е. В. Маркечко // Промышленное и гражданское строительство. – 2020. – № 7. – С. 4–10.
10. Глушко, К. К. Устойчивость деревянного бруса, связанного с упругим основанием / К. К. Глушко, А. Я. Найчук, С. М. Семенюк // Промышленное и гражданское строительство. – М. : ПГС, 2022. – № 6. – С. 19–25.
11. Piazza, M. Strutture in legno – Materiale, calcolo e progetto secondo le nuovenormativeeuropee / M. Piazza, R. Tomasi, R. Modena. – Milano : Hoepli, 2005.
12. Formolo, S. Compression perpendicular to the grain and reinforcement of a pre-stressed timber deck / S. Formolo, R. Granström // Department of Civil and Environmental Engineering Division of Structural Engineering Steel and Timber Structures, Chalmers University of Technology. – Göteborg, 2007.
13. Nilsson, K. Skruvarmering som förstärkning i trä vid belastning vinkelrätt fiberriktningen : en försöksstudie, Examensarbete / K. Nilsson // Lunds Tekniska Högskola ; Avdelningen för Konstruktionsteknik. – Lund, 2002.
14. Глушко, К. К. Устойчивость сжатых стержней сплошного сечения переменной жесткости / К. К. Глушко, К. А. Глушко // Особенности развития региональной архитектуры : сб. статей Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 9 февр. 2024 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; под ред.: А. И. Карозы, В. В. Тура. – Брест, 2024. – С. 73–81.
15. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев : Сталь, 2002. – 600 с.
16. Гончаров, В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции / В. Л. Гончаров. – Успехи математических наук. – 1937. – № 3. – С. 113–143.
17. Лазаров, Р. Д. О построении и исследовании однородных разностных схем / Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, А. А. Самарский // Математический сборник. – 1982. – Т. 117 (159), № 4. – С. 469–480.
18. Калиткин, Н. Н. Об экстраполяции на сгущающихся сетках / Н. Н. Калиткин // Математическое моделирование. – 1994. – Т. 6, № 1. – С. 86–98.
19. Коршун, Л. И. Основы устойчивости стержневых систем / Л. И. Коршун, В. И. Игнатюк, А. С. Хаматовский. – Брест, 1995. – 64 с.
20. Пиковский, А. Ф. Статика стержневых систем со сжатыми элементами / А. Ф. Пиковский. – М. : ФИЗМАТГИЗ, 1961. – 396 с.
21. Горбачев, В. И. Об устойчивости стержней с переменной жесткостью / В. И. Горбачев, О. Б. Москаленко // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Математика и механика. – 2010. – № 1. – С. 65.

References

1. Dinnik, A. N. Prodol'nyj izgib. Kruchenie / A. N. Dinnik. – M. : AN SSSR, 1955. – 392 s.
2. Timoshenko, S. P. Ustojchivost' uprugih sistem / S. P. Timoshenko ; pod red. V. Z. Vlasova. – M. : OGIZ-Gostekhizdat, 1946. – 532 s.
3. Rzhanicyan, A. R. Ustojchivost' равновесия упругих систем / A. R. Rzhanicyan. – M. : Gostekhizdat, 1955. – 475 s.
4. Blejch, F. Ustojchivost' metallicheskih konstrukcij : per. s angl. / F. Blejch – M. : FIZMATGIZ, 1959. – 544 s.
5. Lejtes, S. D. Ustojchivost' szhatyh stal'nyh sterzhnej / S. D. Lejtes. – M. : Gosstrojizdat, 1954. – 312 s.
6. Newmark, N. M. Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads / N. M. Newmark // ASCE Transactions. – 1943. – No. 2202. – Vol. 108. – P. 1161–1234.
7. Salvadori, M. G. Numerical computation of buckling loads by finite differences / M. G. Salvadori // ASCE Transactions. – 1951. – Vol. 116. – P. 590–624.
8. Glushko, K. K. Chislennyj analiz ustojchivosti central'no szhatyh stal'nyh vintov v derevyannyh konstrukciyah / K. K. Glushko, E. V. Markechko // Teoriya i praktika issledovanij i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR) : sb. st. Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 27 marta 2020 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest : BrGTU, 2020. – S. 31–38.
9. Najchuk, A. YA. Ustojchivost' stal'nyh central'no szhatyh vintov v massive drevesiny / A. YA. Najchuk, K. K. Glushko, E. V. Markechko // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. – 2020. – № 7. – S. 4–10.
10. Glushko, K. K. Ustojchivost' derevyannogo brusa, svyazannogo s uprugim osnovaniem / K. K. Glushko, A. YA. Najchuk, S. M. Semenyuk // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. – M. : PGS, 2022. – № 6. – S. 19–25.
11. Piazza, M. Strutture in legno – Materiale, calcolo e progetto secondo le nuovenormativeeuropee / M. Piazza, R. Tomasi, R. Modena. – Milano : Hoepli, 2005.
12. Formolo, S. Compression perpendicular to the grain and reinforcement of a pre-stressed timber deck / S. Formolo, R. Granström // Department of Civil and Environmental Engineering Division of Structural Engineering Steel and Timber Structures, Chalmers University of Technology. – Göteborg, 2007.
13. Nilsson, K. Skruvarmering som förstärkning i trä vid belastning vinkelrätt fiberriktningen : en försöksstudie, Examensarbete / K. Nilsson // Lunds Tekniska Högskola ; Avdelningen för Konstruktionsteknik. – Lund, 2002.
14. Glushko, K. K. Ustojchivost' szhatyh sterzhnej sploshnogo secheniya peremennoj zhestkosti / K. K. Glushko, K. A. Glushko // Osobennosti razvitiya regional'noj arhitektury : sb. statej Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 9 fevr. 2024 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; pod red.: A. I. Karozy, V. V. Tura. – Brest, 2024. – S. 73–81.
15. Perel'muter, A. V. Raschetnye modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ih analiza / A. V. Perel'muter, V. I. Slivker. – Kiev : Stal', 2002. – 600 s.
16. Goncharov, V. L. Interpolyacionnye processy i celye funkcii / V. L. Goncharov. – Uspekhi matematicheskikh nauk. – 1937. – № 3. – S. 113–143.
17. Lazarov, R. D. O postroenii i issledovanii odnorodnyh raznostnyh skhem / R. D. Lazarov, V. L. Makarov, A. A. Samarskij // Matematicheskij sbornik. – 1982. – T. 117 (159), № 4. – S. 469–480.
18. Kalitkin, N. N. Ob ekstrapolyacii na sgushchayushchihysya setkah / N. N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. – 1994. – T. 6, № 1. – S. 86–98.
19. Korshun, L. I. Osnovy ustojchivosti sterzhnevnyh sistem / L. I. Korshun, V. I. Ignatyuk, A. S. Hamatovskij. – Brest, 1995. – 64 s.
20. Pikovskij, A. F. Statika sterzhnevnyh sistem so szhatyimi elementami / A. F. Pikovskij. – M. : FIZMATGIZ, 1961. – 396 s.
21. Gorbachev, V. I. Ob ustojchivosti sterzhnej s peremennoj zhestkost'yu / V. I. Gorbachev, O. B. Moskalenko // Vestn. Mosk. un-ta. Ser 1. Matematika i mekhanika. – 2010. – № 1. – S. 65.

Материал поступил 12.12.2025, одобрен 28.01.2026, принят к публикации 09.02.2026