

УДК 556.01:51-7

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ ГИДРОЛОГИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Л. П. Махнист¹, Т. И. Каримова², П. А. Меркушевич³, И. Ю. Сверба⁴¹ К. т. н., доцент, доцент кафедры математики и информатики УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: lpmakhnist@g.bstu.by² К. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математики и информатики УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: ti@tut.by³ Студент 2-го курса специальности «Электронные системы и технологии» УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: 11mpa@mail.ru⁴ Студент 2-го курса специальности «Электронные системы и технологии» УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: sverbai10@gmail.com

Реферат

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна – Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа, с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание распределения вероятностей изменения речного стока. Этот параметр является решением дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера – Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности.

В отличие от использования численного интегрирования этого дифференциального уравнения, в работе получено решение, представленное в виде степенного ряда. Для этого в работе используются различные подходы к решению дифференциального уравнения. Это и метод степенных рядов, который используется для нахождения решений дифференциальных уравнений в виде бесконечных степенных рядов, которые разлагаются по степеням переменной. Это и разложение функции в ряд Маклорена, который используется для нахождения решений дифференциальных уравнений.

В работе также используется преобразование Лапласа, которое, как правило, применяется лишь для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это дало возможность получить дифференциальное уравнение для функции изображения решения исходного дифференциального уравнения. Полученное дифференциальное уравнение для функции изображения было решено методом степенных рядов с получением соответствующих рекуррентных соотношений для членов степенного ряда и формул для их вычисления. Также использовалось обратное преобразование Лапласа для преобразования функции изображения в функцию оригинала, которая и является решением соответствующего дифференциального уравнения.

Предлагаемая методика может быть использована для решения более широкого круга задач стохастической гидрологии.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, ряд Маклорена, преобразование Лапласа, задачи гидрологии, модель колебаний речного стока.

SOLUTION OF ONE OF THE PROBLEMS OF HYDROLOGY USING POWER SERIES AND LAPLACE TRANSFORMATION

L. P. Makhnist, T. I. Karymava, P. A. Merkushevich, I. Yu. Sverba

Abstract

The paper considers a model of long-term fluctuations in river runoff obtained on the basis of the Ornstein – Uhlenbeck stochastic differential equation. The process under consideration, which is a homogeneous in time Markov process of diffusion type, with the corresponding coefficient of drift and diffusion, makes it possible to estimate the mathematical expectation of the probability distribution of changes in river runoff. This parameter is a solution of a second-order differential equation with boundary conditions obtained on the basis of the Fokker – Planck equation and the inverse Kolmogorov equation for the transition probability density.

Unlike using numerical integration of this differential equation, the paper obtains a solution presented in the form of a power series. For this purpose, the paper uses various approaches to solving a differential equation. This is the power series method, which is used to find solutions to differential equations in the form of infinite power series that are expanded in powers of the variable. This is the expansion of a function in a Maclaurin series, which is used to find solutions to differential equations.

The work also uses the Laplace transform, which is usually used only for solving linear differential equations with constant coefficients. This made it possible to obtain a differential equation for the image function of the solution of the original differential equation. The resulting differential equation for the image function was solved by the power series method to obtain the corresponding recurrence relations for the terms of the power series and formulas for calculating them. The inverse Laplace transform was also used to transform the image function into the original function, which is the solution to the corresponding differential equation.

The proposed technique can be used to solve a wider range of stochastic hydrology problems.

Keywords: differential equations, Maclaurin series, Laplace transform, hydrology problems, river flow oscillation model.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии (например, в [1]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\zeta^2} - \zeta \frac{d\theta_1}{d\zeta} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\zeta} \Big|_{\zeta=+\infty} = 0, \quad \theta_1(\zeta) \Big|_{\zeta=\zeta_*} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) при решении некоторых прикладных задач (например, в [1] и [2]) интегрировалось различными методами, например в [3]. В работах [4], [5] исследовалась сходимость решения этого уравнения, а в работе [6] исследовалось его асимптотическое поведение. Более сложные модели, представимые системой дифференциальных уравнений аналогичного типа, рассматривались в работах [7–10]. Общий подход к построению таких моделей рассмотрен в [11]. В работах [12], [13] и [14] для решения

уравнения (1) использовалась система компьютерной алгебры, а работе [15] рассматривались некоторые подходы к решению этого уравнения с использованием степенных рядов.

В данной статье получено решение уравнения (1) с использованием степенных рядов и преобразования Лапласа.

Использование степенных рядов для решения одной из задач гидрологии

Приведем решение этого уравнения, используя степенные ряды.

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$. Тогда, учитывая, что

$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = \frac{df_1}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному урав-

нению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, с условием $f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$.

Это уравнение вида $f_1'(\xi) - p(\xi)f_1(\xi) = q(\xi)$, которое можно решить, например, путём умножения на интегрирующий множитель: $e^{\int p(\xi)d\xi} = e^{-\int \xi d\xi} = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Тогда уравнение запишется как

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot f_1'(\xi) - \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \cdot f_1(\xi) = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Заметим, что $f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Учитывая, что $f_1'(\xi) = -1 + \xi f_1(\xi)$, получим, что $f_1'(0) = -1$.

Далее решение дифференциального уравнения $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ будем отыскивать в виде степенного ряда

$f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$, учитывая, что $f_1(\xi)|_{\xi=\infty} = 0$. Тогда

$f_1'(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1}$. Подставляя $f_1'(\xi)$ и $f_1(\xi)$ в уравнение

$$\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1, \text{ получим } \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \xi^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{n+1} = -1.$$

Введя замены $n-1 = k$ и $n+1 = m$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} \xi^k - \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} \xi^m = -1 \text{ или, полагая } k = n \text{ и}$$

В силу того, что левая часть последнего уравнения является

производной произведения двух функций $\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f_1(\xi) \right)' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$,

$$\text{получим } f_1(\xi) = \left(C - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Заметим, что для функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

выполняется: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0,5$ (например,

$$\text{в [16]). Поэтому } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)|_{\xi=+\infty} = 0$, имеем

$$f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}} \text{ или}$$

$$f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Действительно, используя правило Лопиталя нахождения пределов функций, раскрывающее неопределённости вида $\frac{0}{0}$, получим

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f_1(\xi) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-t^2/2} dt}{e^{-\xi^2/2}} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi} e^{-t^2/2} dt \right)'}{\left(e^{-\xi^2/2} \right)'} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-\xi^2/2}}{-\xi e^{-\xi^2/2}} = 0.$$

$m = n$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравне-

ние $c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \xi^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \xi^n = -1$ или уравнение

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - c_{n-1}) \xi^n = -1 \text{ для любого } \xi.$$

Следовательно, $(n+1)c_{n+1} - c_{n-1} = 0$ или $c_{n+1} = \frac{c_{n-1}}{n+1}$,

если n - натуральное число ($n \in \mathbb{N}$), и $c_1 = -1$.

При $n = 2k-1$ - нечетное число ($k \in \mathbb{N}$), получим

$$c_{2k} = \frac{c_{2k-2}}{2k} = \frac{c_0}{(2k)!!}, \text{ где } (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k) \text{ - двойной}$$

факториал четного числа $2k$.

При $n = 2k$ - четное число ($k \in \mathbb{N}$), получим

$$c_{2k+1} = \frac{c_{2k-1}}{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!!},$$

где $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)$ - двойной факториал нечетного числа $2k+1$.

Следовательно, $f_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n = c_0 + c_1 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \xi^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} \xi^{2k+1} =$
 $= c_0 + c_1 \xi + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}$, полагая, что $0!! = 1$.

Так как $c_0 = f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $c_1 = -1$, то

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Найдем решение дифференциального уравнения $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, разложив функцию $f_1(\xi)$ в ряд Маклорена.

Так как $f_1'(\xi) = -1 + \xi f_1(\xi)$, то $f_1''(\xi) = f_1(\xi) + \xi f_1'(\xi)$,
 $f_1'''(\xi) = 2f_1'(\xi) + \xi f_1''(\xi)$, $f_1^{(4)}(\xi) = 3f_1''(\xi) + \xi f_1'''(\xi)$
 и т. д.

Следовательно, используя метод математической индукции, получим рекуррентное соотношение $f_1^{(n)}(\xi) = (n-1)f_1^{(n-2)}(\xi) + \xi f_1^{(n-1)}(\xi)$, где $f_1^{(n)}(\xi)$ – производная функции $f_1(\xi)$ n -го порядка, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$, и $f_1^{(0)}(\xi) = f_1(\xi)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} \xi^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(2k)}(0)}{(2k)!} \xi^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} = f_1(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + f_1'(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Учитывая, что $f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $f_1'(0) = -1$, получим

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Теперь найдем решение дифференциального уравнения, используя преобразование Лапласа. Заметим, что можно доказать существование преобразования Лапласа функции $f_1(\xi)$.

Используя линейность преобразования Лапласа, найдем преобразование Лапласа функции $f_1'(\xi) - \xi f_1(\xi)$ – левой части дифференциального уравнения $f_1'(\xi) - \xi f_1(\xi) = -1$:

$$L\{f_1'(\xi) - \xi f_1(\xi)\} = L\{f_1'(\xi)\} + L\{-\xi f_1(\xi)\} = pF(p) - f_1(0) + F'(p).$$

С другой стороны, преобразование Лапласа правой части дифференциального уравнения $f_1'(\xi) - \xi f_1(\xi) = -1$ определяется соотношением:

$$L\{-1\} = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} (-1) d\xi = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} de^{-p\xi} = \frac{1}{p} \left(e^{-p\xi} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{p} \left(\lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{-p\xi} - 1 \right) = -\frac{1}{p}.$$

При $n = 2k$ – четное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $f_1^{(2k)}(0) = (2k-1)f_1^{(2k-2)}(0) = (2k-1)!! f_1(0)$, где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ – двойной факториал нечетного числа $2k-1$.

При $n = 2k+1$ – нечетное число ($k \in \mathbb{N}$), получим $f_1^{(2k+1)}(0) = (2k)f_1^{(2k-1)}(0) = (2k)!! f_1'(0)$,

где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$ – двойной факториал четного числа $2k$.

Следовательно,
$$\frac{f_1^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(2k-1)!! f_1(0)}{(2k)!} = \frac{f_1(0)}{(2k)!!}$$

и
$$\frac{f_1^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(2k)!! f_1'(0)}{(2k+1)!} = \frac{f_1'(0)}{(2k+1)!!},$$
 где $k \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд Маклорена для функции $f_1(\xi)$ можно записать в виде:

Так как $L\{f_1(\xi)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} f_1(\xi) d\xi$ – преобразование Лапласа функции $f_1(\xi)$, то
 $F'(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} \xi f_1(\xi) d\xi = L\{-\xi f_1(\xi)\}$ – преобразование Лапласа функции $-\xi f_1(\xi)$.

Заметим, что для преобразования Лапласа $f_1'(\xi)$ – производной функции $f_1(\xi)$ выполняется (например, в [17–20]):

$$L\{f_1'(\xi)\} = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} f_1'(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} df_1(\xi) = e^{-p\xi} f_1(\xi) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f_1(\xi) de^{-p\xi} =$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{-p\xi} f_1(\xi) - f_1(0) + p \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} f_1(\xi) d\xi = pF(p) - f_1(0).$$

Тогда получим уравнение $pF(p) - f_1(0) + F'(p) = -\frac{1}{p}$

или $F'(p) + pF(p) = f_1(0) - \frac{1}{p}$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решение дифференциального уравнения

$F'(p) + pF(p) = f_1(0) - \frac{1}{p}$ будем отыскивать в виде степен-

ного ряда $F(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$, учитывая, что $F(p)|_{p=+\infty} = 0$.

Тогда $F'(p) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{p^{n+1}}$.

Подставляя $F'(p)$ и $F(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$ в уравнение

$$F'(p) + pF(p) = f_1(0) - \frac{1}{p},$$

получим $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{p^{n+1}} + p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n} = f_1(0) - \frac{1}{p}$

или $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{p^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^{n-1}} = f_1(0) - \frac{1}{p}$.

Заметим, что $a_1 = f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $\frac{a_2}{p} = -\frac{1}{p}$, т. е.

$$a_2 = -1.$$

Следовательно, $F(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{p^{2k+1}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!!}{p^{2k+2}}$

или $F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{p^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!!}{p^{2k+2}}$.

Введя замены $k = n+1$ и $m = n-1$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение

$-\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k-1)a_{k-1}}{p^k} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_{m+1}}{p^m} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{p}$ или, полагая $k = n$ и $m = n$ в первой и второй сумме, соответственно, получим уравнение

$-\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{p^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{p^n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{p}$ или уравнение

$a_1 + \frac{a_2}{p} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}}{p^n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{p}$ для любого p .

Следовательно, $a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = 0$ или

$a_{n+1} = (n-1)a_{n-1}$, если n – натуральное число, большее или

равное 2, и $a_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $a_2 = -1$.

При $n = 2k$ – четное число ($k \in \mathbb{N}$), получим

$$a_{2k+1} = (2k-1)a_{2k-1} = (2k-1)!!a_1 = (2k-1)!!\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ – двойной факториал нечетного числа $2k-1$.

При $n = 2k+1$ – нечетное число ($k \in \mathbb{N}$), получим

$$a_{2k+2} = (2k)a_{2k} = (2k)!!a_2 = -(2k)!!,$$

где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$ – двойной факториал четного числа $2k$.

Так как

$$L\{\xi^n\} = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} \xi^n d\xi = -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \xi^n de^{-p\xi} = -\frac{1}{p} \left(\xi^n e^{-p\xi} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} d\xi \right) =$$

$$= -\frac{1}{p} \left(\xi^n e^{-p\xi} \Big|_0^{+\infty} - n \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} \xi^{n-1} d\xi \right) = \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} \xi^{n-1} d\xi = \frac{n}{p} L\{\xi^{n-1}\}$$

$$\text{и } L\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-p\xi} d\xi = -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} de^{-p\xi} = -\frac{1}{p} \left(e^{-p\xi} \Big|_0^{+\infty} \right) = -\frac{1}{p} \left(\lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{-p\xi} - 1 \right) = \frac{1}{p},$$

то $L\{\xi^n\} = \frac{n!}{p^n} L\{1\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$, если n – натуральное число.

Следовательно, для обратного преобразования Лапласа L^{-1}

выполняется соотношение $L^{-1}\left\{\frac{n!}{p^{n+1}}\right\} = \xi^n$ или

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p^{n+1}}\right\} = \frac{\xi^n}{n!}, \text{ где } n - \text{целое неотрицательное число.}$$

Тогда, используя линейность обратного преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned}
f_1(\xi) &= L^{-1} F(p) = L^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)!!}{p^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!!}{p^{2k+2}} \right\} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)!! L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{2k+1}} \right\} - \sum_{k=0}^{+\infty} (2k)!! L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{2k+2}} \right\} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1)!! \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} (2k)!! \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!} = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.
\end{aligned}$$

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то $\theta_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)} + C$.

Учитывая начальное условие $\theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*),$$

где

$$S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)}$$

или

$$S_1(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\left\{ \frac{n}{2} \right\}} \frac{(-1)^{n-1} \xi^n}{(n-1)!! n},$$

где $\left\{ t \right\}$ – дробная часть числа t .

Заключение

В работе использовалось преобразование Лапласа для решения дифференциального уравнения (1), которое, как правило, применяется только для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предлагаемая методика решения уравнения (1) может быть использована для решения более широкого круга задач стохастической гидрологии, которые описываются дифференциальными уравнениями аналогичного вида (например, в [4] и [5]).

Список цитированных источников

1. Найденов, В. И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В. И. Найденов, В. И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62–67.
2. Волчек, А. А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А. А. Волчек, С. И. Парфомук // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2006. – № 5. – С. 56–60.
3. Волчек, А. А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2008. – № 5. – С. 84–87.
4. Гетман, В. А. Сходимость и свойства решения одного стохастического уравнения / В. А. Гетман, И. И. Гладкий, С. В. Ефимик // Современные проблемы математики и вычислительной техники : материалы VI Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 26–28 нояб. 2009 г. : в 2 ч. / Брест. гос. техн. ун-т ; под ред. В. С. Рубанова [и др.]. – Брест, 2009. – Ч. 2. – С. 121–126.
5. Волчек, А. А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2009. – № 5. – С. 2–5.
6. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов Междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.
7. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика. – 2010. – № 1. – С. 68–77.
8. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из задач стохастической гидрологии / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Международная математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 7–10 дек. 2010 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С. Г. Красовский, А. А. Леваков, С. А. Мазаник. – Минск, 2010. – С. 105.
9. Волчек, А. А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.
10. Волчек, А. А. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А. А. Волчек, И. И. Гладкий, Л. П. Махнист // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д. П. Голоскокова, А. Р. Шкадовой. – СПб, 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.
11. Махнист, Л. П. Моменты распределения вероятностей модели гидрологии / Л. П. Махнист, А. А. Волчек, И. И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 93–95.
12. Махнист, Л. П. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.
13. Махнист, Л. П. Использование систем компьютерной алгебры в задаче гидрологического моделирования / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест, 2021. – С. 54–56.

14. Махнист, Л. П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–19.
15. Меркушевич, П. А. Использование рядов для моделирования одной задачи гидрологии / П. А. Меркушевич, И. Ю. Сверба, Л. П. Махнист // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : сб. науч. тр. / Мозыр. гос. пед. ун-т им. И. П. Шамякина ; В. В. Давыдовская (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь, 2025. – С. 259–261.
16. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – М. : Наука, 1984. – 832 с.
17. Гладкий, И. И. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления : методические указания по дисциплине "Высшая математика" для студентов технических специальностей / И. И. Гладкий, М. П. Сидоревич, Т. А. Тузик. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2000. – 52 с.
18. Гладкий, И. И. Ряды. Теория функции комплексной переменной. Операционное исчисление / И. И. Гладкий, И. В. Лизунова, Т. А. Тузик. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2011. – 39 с.
19. Differential equations. Multiple integrals. Infinite sequences and series : учебно-методическая разработка на английском языке по дисциплине "Математика" / Брест. гос. техн. ун-т ; сост. И. И. Гладкий, А. В. Дворниченко, Н. А. Дерачич [и др.]. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2014. – 74 с.
20. Elements of theory of analytic functions of one complex variable : учебно-методическая разработка на английском языке по дисциплине "Математика" / Брест. гос. техн. ун-т ; сост. И. И. Гладкий, А. В. Дворниченко, Т. И. Каримова [и др.]. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2015. – 49 с.
8. Volchek, A. A. O reshenii sistemy differentsial'nykh uravnenij, odnoj iz zadach stohasticheskoy gidrologii / A. A. Volchek, L. P. Mahnist, V. S. Rubanov // Mezhdunarodnaya matematicheskaya konferenciya «Pyatye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam» : tez. dokl. mezhdunar. nauch. konf., Minsk, 7–10 dek. 2010 g. / In-t matematiki NAN Belarusi ; redkol.: S. G. Krasovskij, A. A. Levakov, S. A. Mazanik. – Minsk, 2010. – S. 105.
9. Volchek, A. A. O parametrah raspredeleniya veroyatnostej diffuzionnoj modeli stohasticheskoy gidrologii / A. A. Volchek, I. I. Gladkij, L. P. Mahnist // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika, informatika. – 2010. – № 5. – S. 48–53.
10. Volchek, A. A. O momentah raspredeleniya veroyatnostej modeli diffuzionnogo tipa v praktike gidrologii / A. A. Volchek, I. I. Gladkij, L. P. Mahnist // Matematika i ee prilozheniya : mezhvuz. sb. nauch. tr. / Associaciya matematikov vuzov severo-zapada ; pod red. D. P. Goloskokova, A. R. SHkadovoj. – SPb, 2011. – Vyp. 3. – S. 139–148.
11. Mahnist, L. P. Momenty raspredeleniya veroyatnostej modeli gidrologii / L. P. Mahnist, A. A. Volchek, I. I. Gladkij // Matematicheskie i fizicheskie metody issledovanij: nauchnyj i metodicheskij aspekty : sb. materialov Rесп. nauch.-prakt. konf., Brest, 22–23 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. N. N. Sendera. – Brest : BrGU, 2021. – S. 93–95.
12. Mahnist, L. P. Primenenie sistem komp'yuternoj algebry dlya resheniya modeli stohasticheskoy gidrologii / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Matematicheskie i fizicheskie metody issledovanij: nauchnyj i metodicheskij aspekty : sb. materialov Rесп. nauch.-prakt. konf., Brest, 22–23 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. N. N. Sendera. – Brest, 2021. – S. 96–98.
13. Mahnist, L. P. Ispolzovanie sistem komp'yuternoj algebry v zadache gidrologicheskogo modelirovaniya / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Vychislitel'nye metody, modeli i obrazovatel'nye tekhnologii : sb. materialov Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 22 okt. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. D. V. Gricuka. – Brest, 2021. – S. 54–56.
14. Mahnist, L. P. K resheniyu zadachi gidrologii s ispol'zovaniem sistem komp'yuternoj algebry / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike : sb. materialov Rесп. nauch.-prakt. konf., Brest, 28–29 apr. 2022 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. I. Basika. – Brest, 2022. – S. 17–19.
15. Merkushevich, P. A. Ispolzovanie ryadov dlya modelirovaniya odnoj zadachi gidrologii / P. A. Merkushevich, I. YU. Sverba, L. P. Mahnist // Innovacionnye tekhnologii obucheniya fiziko-matematicheskimi disciplinam : sb. nauch. tr. / Mозыр. gos. ped. un-t im. I. P. SHamyakina ; V. V. Davydovskaya (otv. red.) [i dr.]. – Mозыр', 2025. – S. 259–261.
16. Korn, G. A. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov / G. A. Korn, T. M. Korn. – M. : Nauka, 1984. – 832 s.
17. Gladkij, I. I. Elementy teorii funkciy kompleksnogo peremennogo i operacionnogo ischisleniya : metodicheskie ukazaniya po discipline "Vysshaya matematika" dlya studentov tekhnicheskikh special'nostej / I. I. Gladkij, M. P. Sidorevich, T. A. Tuzik. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2000. – 52 s.
18. Gladkij, I. I. Ryady. Teoriya funkciy kompleksnoj peremennoj. Operacionnoe ischislenie / I. I. Gladkij, I. V. Lizunova, T. A. Tuzik. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2011. – 39 s.
19. Differential equations. Multiple integrals. Infinite sequences and series : uchebno-metodicheskaya razrabotka na anglijskom yazyke po discipline "Matematika" / Brest. gos. tekhn. un-t ; sost. I. I. Gladkij, A. V. Dvornichenko, N. A. Derachic [i dr.]. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2014. – 74 s.
20. Elements of theory of analytic functions of one complex variable : uchebno-metodicheskaya razrabotka na anglijskom yazyke po discipline "Matematika" / Brest. gos. tekhn. un-t ; sost. I. I. Gladkij, A. V. Dvornichenko, T. I. Karimova [i dr.]. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2015. – 49 s.

References

1. Najdenov, V. I. Nelinejnye modeli kolebanij rechnogo stoka / V. I. Najdenov, V. I. SHvejina // Vodnye resursy. – 2002. – T. 29, № 1. – S. 62–67.
2. Volchek, A. A. Sravnitel'naya ocenka markovskih i nelinejnykh modelej godovogo stoka rek Belarusi / A. A. Volchek, S. I. Parfomuk // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika, informatika. – 2006. – № 5. – S. 56–60.
3. Volchek, A. A. O reshenii odnoj stohasticheskoy modeli mnogoletnih kolebanij rechnogo stoka / A. A. Volchek, I. I. Gladkij, L. P. Mahnist // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika, informatika. – 2008. – № 5. – S. 84–87.
4. Getman, V. A. Skhodimost' i svoystva resheniya odnogo stohasticheskogo uravneniya / V. A. Getman, I. I. Gladkij, S. V. Efimik // Sovremennye problemy matematiki i vychislitel'noj tekhniki : materialy VI Rесп. nauch. konf. molodykh uchenykh i studentov, Brest, 26/28 noyab. 2009 g. : v 2 ch. / Brest. gos. tekhn. un-t ; pod red. V. S. Rubanova [i dr.]. – Brest, 2009. – CH. 2. – S. 121–126.
5. Volchek, A. A. O skhodimosti resheniya odnoj maloparametricheskoy modeli mnogoletnih kolebanij rechnogo stoka / A. A. Volchek, L. P. Mahnist, V. S. Rubanov // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fizika, matematika, informatika. – 2009. – № 5. – S. 2–5.
6. Volchek, A. A. Ob asimptoticheskom povedenii parametra odnogo iz raspredelenij veroyatnostej rechnogo stoka / A. A. Volchek, L. P. Mahnist, V. S. Rubanov // Problemy vodosnabzheniya, vodoootvedeniya i energosberezheniya v zapadnom regione Respubliki Belarus' : sb. materialov Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 22–23 apr. 2010 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: S. V. Basov [i dr.]. – Brest, 2010. – S. 45–49.
7. Volchek, A. A. O reshenii sistemy differentsial'nykh uravnenij, odnoj iz modelej mnogoletnih kolebanij rechnogo stoka / A. A. Volchek, L. P. Mahnist, V. S. Rubanov // Vestnik Brestskogo universiteta. Seriya 4, Matematika. Fizika. – 2010. – № 1. – S. 68–77.

Материал поступил 29.08.2025, одобрен 29.08.2025,
принят к публикации 29.08.2025