

УДК 330.45:004.588:519.17

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

**А. И. Жук<sup>1</sup>, Е. Н. Защук<sup>2</sup>, Л. А. Ярмолик<sup>3</sup>, В. А. Шеина<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> К. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математики и информатики, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: aizhuk85@mail.ru

<sup>2</sup> К. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры математики и информатики, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: shvichkina@tut.by

<sup>3</sup> Студентка факультета инженерных систем и экологии, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: askinglop@gmail.com

<sup>4</sup> Студентка факультета инженерных систем и экологии, УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: veronikaseina78@gmail.com

### Реферат

Теория графов играет важную роль в экономике, позволяя анализировать сложные системы и находить оптимальные решения. Она применяется в логистике для оптимизации транспортных маршрутов и минимизации затрат. В рыночных структурах графы помогают моделировать конкуренцию, определять влияние компаний и выявлять ключевых игроков. Финансовые сети используют графовые модели для анализа потоков капитала и оценки системных рисков. В социальных и экономических сетях графы позволяют изучать взаимодействие участников и их влияние на процессы, такие как цепочки поставок или распространение информации. Эти методы делают экономический анализ более точным и помогают принимать эффективные решения.

Решение этих задач очень трудоемко и требует внедрения новых методов, которые будут использовать классические задачи с графами на базе систем компьютерной алгебры.

В статье исследуются способы задания графов в символьном пакете Mathematica, демонстрируются его возможности при работе с графами. Mathematica – это мощная система компьютерной алгебры, разработанная компанией Wolfram Research. Она используется для математических, инженерных и научных вычислений, а также для визуализации данных и моделирования сложных систем. Визуализация данных в системе отличается высокой точностью и возможностью интерактивного взаимодействия, что особенно полезно для исследований и презентаций. Основное внимание уделяется решению и визуализации двух ключевых задач: поиск максимального (минимального) остовного дерева, задача китайского почтальона, где целью является нахождение оптимального маршрута для прохождения всех ребер графа.

Рассматриваются алгоритмы, реализованные в Mathematica, а также визуализация полученных решений, что подчеркивает практическое применение графов в задачах оптимизации.

**Ключевые слова:** элементы теории графов, минимальное и максимальное остовное дерево, система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, оптимальный маршрут.

## MODELING GRAPH THEORY PROBLEMS USING COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS

**A. I. Zhuk, E. N. Zashchuk, L. A. Yarmolik, V. A. Sheina**

### Abstract

Graph theory plays an important role in economics, enabling the analysis of complex systems and the discovery of optimal solutions. It is applied in logistics to optimize transportation routes and minimize costs. In market structures, graphs help model competition, determine the influence of companies, and identify key players. Financial networks use graph models to analyze capital flows and assess systemic risks. In social and economic networks, graphs make it possible to study participant interactions and their impact on processes such as supply chains or the spread of information. These methods make economic analysis more precise and help in making effective decisions.

Solving these problems is very labor-intensive and requires the implementation of new methods that use classical graph problems based on computer algebra systems.

This article explores the ways of defining graphs in the symbolic package Mathematica, demonstrating its capabilities when working with graphs. Mathematica is a powerful computer algebra system developed by Wolfram Research. It is used for mathematical, engineering, and scientific computations, as well as for data visualization and modeling of complex systems. Data visualization in the system is characterized by high accuracy and interactive capabilities, which is especially useful for research and presentations. The main focus is on solving and visualizing two key problems: finding the maximum (or minimum) spanning tree and the Chinese Postman Problem, where the goal is to find the optimal route that traverses all the edges of a graph.

The algorithms implemented in Mathematica are examined, along with the visualization of the resulting solutions, highlighting the practical application of graphs in optimization tasks.

**Keywords:** elements of graph theory, minimum and maximum spanning tree, computer algebra system Wolfram Mathematica, optimal route.

### Введение

Теория графов широко применяется в экономике для моделирования и оптимизации различных процессов [1, 2]. Например, одними из ключевых направлений использования это:

– оптимизация логистики и транспортных маршрутов: графы помогают находить кратчайшие пути и минимизировать затраты на перевозку товаров;

– анализ сетей поставок: графовые модели используются для изучения связей между поставщиками, производителями и потребителями;

– социально-экономические исследования: графовые методы помогают изучать связи между предприятиями, рынками и экономическими агентами;

– оптимизация производственных процессов: графы используются для планирования и управления ресурсами [3, 4].

Методы применения компьютерной алгебры к решению прикладных задач являются активно развивающейся научной отраслью. Так, в работах [5, 6, 7] была проведена компьютерная симуляция задач биологии, в работах [8–11] – моделирование задач гидрологии с помощью систем компьютерной алгебры. Разрабатывается мето-

дическое направление использования систем компьютерной алгебры в преподавании теоретических дисциплин [12–14]. Так используют библиотеку Wolfram Demonstrations Project [15], в которой содержатся готовые разработанные модули, авторами были разработана серия программных модулей для использования их при чтении лекций в университете [16–25].

В современных математических символьных пакетах, таких как Wolfram Mathematica, задание графов осуществляется по средствам мощных алгоритмов и гибких инструментов, обеспечивающих простоту их построения и анализа [15]. Данная статья посвящена исследованию способов представления графов и их построения в этом пакете, что открывает новые возможности для решения задач в области теории графов.

### Способы задания графов

В СК Mathematica графы можно задавать различными способами [15]. Одним из таких способов является задание графа с помощью списка ребер, где каждая пара вершин соединена ребром. Функция Graph позволяет изменять цвет, форму и размер вершин, цвет и стиль линии, соединяющей ребра, указывать вес и пропускную способность ребер и отображать их на графе.

Следующая командная строка задает неориентированный граф с 4 вершинами и 4 ребрами  $v_1 - v_2$ ,  $v_2 - v_3$ ,  $v_3 - v_1$ ,  $v_4 - v_3$ , размер вершин – средний, и название вершин имеет вид –  $v_i$ :

```
Graph[{1 - 2, 2 - 3, 3 - 1, 4 - 3}, VertexSize -> Medium, VertexLabels -> Table[i -> vi, {i, 4}]]
```

В случае необходимости задания ориентированного графа командная строка примет следующий вид:

```
Graph[{1 -> 2, 2 -> 3, 3 -> 1, 4 -> 3}, VertexSize -> Medium, VertexStyle -> Orange, EdgeStyle -> {1 -> 2 -> Blue, 2 -> 3 -> Dashed}, VertexLabels -> Table[i -> vi, {i, 4}]]
```

Результатом будет вывод на экран графа с 4 вершинами оранжевого цвета, с 4 ориентированными ребрами  $v_1 \rightarrow v_2$ ,  $v_2 \rightarrow v_3$ ,  $v_3 \rightarrow v_1$ ,  $v_4 \rightarrow v_3$ , где ребро  $1 \rightarrow 2$  выделено синим цветом, а ребро  $2 \rightarrow 3$  – пунктиром.

Графы можно задать с использованием встроенных функций для создания стандартных графов, таких как полный граф, циклы и деревья: CompleteGraph, CycleGraph, TreeGraph. Так же графы можно импортировать из внешних файлов, таких как файлы формата GraphML или CSV, содержащих информацию о ребрах и вершинах.

Еще один способ задания графа в рассматриваемом символьном пакете – по заданной матрице смежности (AdjacencyGraph) или инцидентности (IncidenceGraph). Матрица смежности графа – квадратная матрица, размерность ее совпадает с количеством вершин графа, элементы матрицы обозначают наличие (1) или отсутствие (0) ребра между соответствующими вершинами. Такое представление используется для ориентированных и неориентированных графов. Авторами был написан программный модуль, который генерирует случайным образом матрицу смежности графа, состоящую из 0 и 1 с помощью функций RandomInteger и MatrixForm по заданному пользователем числу вершин графа. И уже по сгенерированной матрице модуль строит и выводит на экран соответствующий граф и саму матрицу смежности (рисунок 1). Пользователь может менять количество вершин графа в процессе работы модуля. Сам авторский модуль имеет следующий вид:

```
Manipulate[
Module[{vetr},
m=RandomInteger[1,{n,n}];
Grid[{{MatrixForm[m],AdjacencyGraph[m,VertexLabels->Table[i->Subscript[v,i],{i,n}]]}},ItemSize->{{15,20},15}},
{n,5,"введите число вершин"},1,7,1,Appearance->"Labeled",
AutorunSequencing->{1},SaveDefinitions-> True].
```

На рисунке 1 представлен результат работы модуля при значении числа вершин  $n=5$ . На экран выведена квадратная матрица смежности размерности  $5 \times 5$  и соответствующей этой матрице граф.

Изменение значений опции DirectedEdges -> False позволяет строить неориентированный граф функцией AdjacencyGraph.

Матрица инцидентности для неориентированного графа содержит только 0 и 1, для ориентированного графа 0, 1, -1. Количество строк в матрице инцидентности соответствует числу вершин графа, а количество столбцов – числу ребер. Любая случайная матрица из 0, 1 и -1 не может быть матрицей инцидентности. Матрица инцидентности должна обладать следующими свойствами: каждый столбец матрицы должен соответствовать одному ребру графа и содержать одно значение 1 и одно значение -1 для ориентированного графа и два значения 1 для неориентированных графов, наличие одной 1 означает петлю при соответствующей вершине. Таким образом, возникают сложности при использовании матрицы инцидентности для задания графа случайным образом.

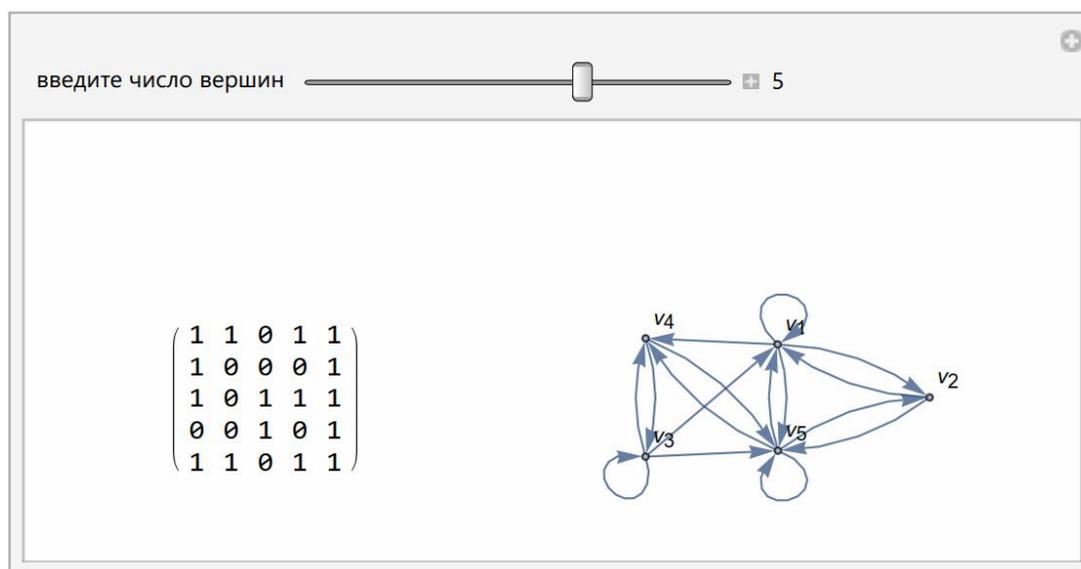


Рисунок 1 – Результат работы программного модуля по построению ориентированного графа по матрице смежности

В пакете предусмотрена встроенная функция RandomGraph, позволяющая строить произвольный граф по количеству ребер и вершин. В этой встроенной в пакет функции есть ряд опций, поз-

воляющий строить ориентированные, неориентированные графы, взвешенные графы и графы с заданной пропускной способностью ребер. Авторами была написана функция:

```
RG[n0_,m0_,p0_] := Module[{n=n0,m=m0,p=p0,style,weight},
style={VertexSize->0.2,ImagePadding->10,ImageSize->{220,220}};
weight=RandomInteger[{{1,p},m];
g1=RandomGraph[{n,m},DirectedEdges->True,VertexSize->Medium,EdgeWeight->weight,style];
ER=EdgeRules[g1];
g3=Graph[g1,EdgeLabels->Table[ER[[i]]->weight[[i]],{i,Length[ER]}],VertexLabels->Table[Subscript[v, i],{i,VertexCount[g1]}],style];
g3],
```

которая генерирует случайным образом список значений весов ребер (weight) в заданном пользователем диапазоне (p), генерирует случайный граф (g1) по введенным параметрам n (число вершин графа) и m (число ребер графа), формирует новый взвешенный граф (g3), придавая каждому ребру графа g1 соответствующее значение из списка весов weight. Результатом работы данной функции является взвешенный ориентированный граф с введенным пользователем числом вершин, ребер и диапазоном веса ребер.

Следующий программный модуль при нажатии кнопки «новый граф» вызывает функцию RG[n0\_,m0\_,p0\_] с выбранными пользователем параметрами:

```
Manipulate[Module[{style},
style={VertexSize->0.2,ImagePadding->10,ImageSize->{220,220}};g,
{{g, RG[5,6,5]},None},
{{p,5,"диапазон веса ребер p"}},1,10,1,Appearance->"Labeled"},
{{n,5,"количество вершин графа n"}},2,10,1,Appearance->"Labeled"},
Control[{{m,4,"количество ребер графа m"}},n-1,n (n-1)/2,1,Appearance->"Labeled"}],
Button["новый граф",g=RG[n,m,p]],
AutorunSequencing->{3},SaveDefinitions->True].
```

На рисунке 2 виден результат работы модуля при значениях  $p=5$  (диапазон веса берет от 1 до 5),  $n=5$  (число вершин графа),  $m=7$  (число ребер графа).

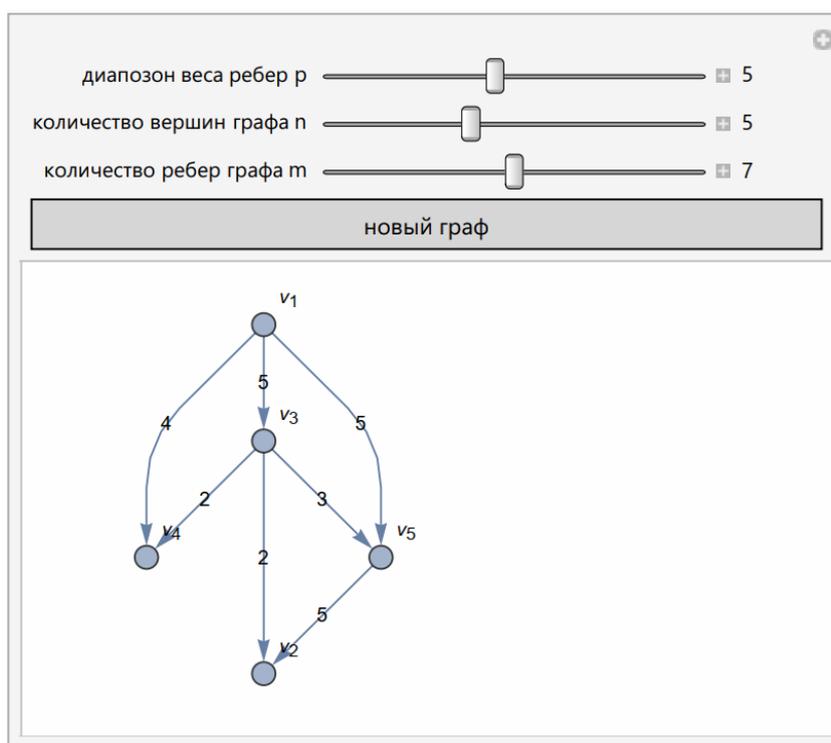


Рисунок 2 – Результат работы программного модуля по построению ориентированного взвешенного графа по заданному числу вершин и ребер

Изменение значений опции DirectedEdges → False функции RandomGraph позволяет строить неориентированный граф. Командная строка

```
Control[{{m,4,"количество ребер графа m"}},n-1,n (n-1)/2,1,Appearance->"Labeled"]
```

осуществляет контроль числа ребер графа, по уже введенному числу вершин и не позволяет пользователю ввести значение, при котором граф невозможно построить. При необходимости генерации графа с заданной пропускной способностью ребер следует заменить опцию EdgeWeight → weight функции RandomGraph на EdgeCapacity → weight.

**Поиск минимального и максимального остовного дерева**

При изучении элементов теории графов особое внимание уделяется алгоритмам поиска минимального и максимального остовного дерева [1, 26, 27]. Этот алгоритм находит применение в различных областях: он помогает оптимизировать прокладку кабелей или проводов, минимизируя затраты при проектировании локальных сетей или электросетей, он используется для построения эффективных

маршрутов доставки, он может быть использован для определения кластеров в больших наборах данных и др.

Для поиска минимального остовного дерева в системе Mathematica предусмотрена встроенная функция FindSpanningTree. Для поиска максимального остовного дерева также можно использовать эту же функцию, только перед ее применением вес каждого ребра необходимо умножить на -1. Авторами статьи был написан программный модуль, который реализует в случайно сгенерированном графе поиск максимального или минимального остовного дерева в зависимости от выбора пользователя.

Для генерации взвешенного неориентированного графа случайным образом воспользуемся функцией RG[n0\_, m0\_, p0\_], которая использовалась в предыдущем модуле. Напомним, что эта функция генерирует граф по заданному пользователем числу вершин и ребер с весами ребер в выбранном диапазоне. Для нахождения максимального и минимального остовного дерева были написаны специальные функции, которые выводят на экран первоначальный граф, выделяют в нем соответствующую сеть и вычисляют длину этой сети.

```
FMINST[g0_] := Module[{g = g0},
```

```

style = {VertexSize -> 0.2, VertexLabels -> "Name",
ImagePadding -> 10, ImageSize -> {220, 220}};
g1 = FindSpanningTree[g];
eweight = PropertyValue[{g1, #}, EdgeWeight] & /@
EdgeList[g1];
Grid[
{{g, Column[{Text@
Row[{HighlightGraph[g, g1, GraphHighlightStyle ->
"Thick"}]}]}]}],
Text@Row[{" длина минимальная сети = ",
Total[eweight]}]}]]
FMAXST[g0_] := Module[{g = g0},
style = {VertexSize -> 0.2, VertexLabels -> "Name",
ImagePadding -> 10, ImageSize -> {220, 220}};
eweight = PropertyValue[{g, #}, EdgeWeight] & /@ Edge-
List[g];
g1 = FindSpanningTree[g, EdgeWeight -> -1*eweight];
eweight1 = PropertyValue[{g, #}, EdgeWeight] & /@
EdgeList[g1];
Grid[{{g,
Column[{Text@
Row[{HighlightGraph[g, g1, GraphHighlightStyle ->
"Thick"}]}]}]}],
Text@Row[{" длина максимальная сети = ",
Total[eweight1]}]}]]].
    
```

```

Сам программный модуль имеет следующий вид:
Manipulate[
Module[{{ style},
style = {VertexSize -> 0.2, ImagePadding -> 10,
ImageSize -> {220, 220}};
Grid[{{Switch[op,
1, {FMINST[g]},
2, {FMAXST[g]}]}]}],
{{g, RG[5, 6, 5]}, None},
{{p, 5, "диапазон веса ребер p"}, 1, 10, 1, Appearance ->
"Labeled"},
{{n, 5, "количество вершин графа n"}, 2, 10, 1,
Appearance -> "Labeled"},
Control[{{m, 4, "количество ребер графа m"}, n - 1, n (n -
1)/2, 1,
Appearance -> "Labeled"}],
Button["новый граф", g = RG[n, m, p]],
{{op, 1, "НАЙТИ"}, {1 -> "минимальную сеть ",
Spacer[5],
2 -> "максимальную сеть "}},
AutorunSequencing -> {3}, SaveDefinitions -> True].
    
```

Рисунок 3 демонстрирует результат работы программного модуля, который выводит на экран сгенерированный взвешенный неориентированный граф с числом вершин  $n=7$ , числом ребер  $m=11$  и диапазоном веса ребер от 1 до  $p=9$ . В пользовательском окне при нажатии соответствующей кнопки на экране отображается минимальная сеть и ее длина или максимальная сеть и ее длина (рисунок 3).

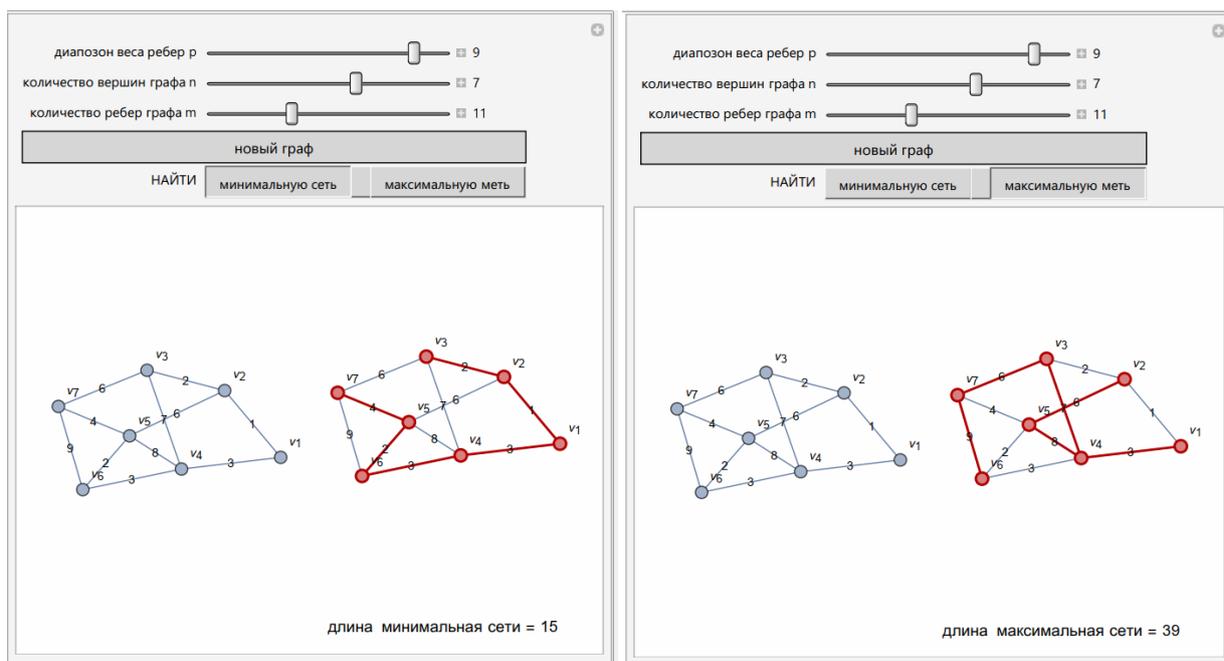


Рисунок 3 – Результат работы программного модуля поиска минимального и максимального остовного дерева в графе

### Задача китайского почтальона

Обязательной задачей теории графов является задача китайского почтальона (Chinese Postman Problem). При решении этой задачи требуется найти кратчайший маршрут, который проходит через каждое ребро графа хотя бы один раз. Алгоритм ее решения используется для оптимизации маршрутов доставки почты, инспекции дорог или, например, уборки улиц. Если граф является эйлеровым (имеет цикл, проходящий через каждое ребро один раз), то решение задачи – этот цикл. Если граф не является эйлеровым, то необходимо минимизировать количество повторных проходов по ребрам, чтобы сделать маршрут оптимальным. Для поиска такого маршрута в системе Mathematica предусмотрена встроенная функция FindPostmanTour. Был написан программный модуль, который с использованием анимации выводит на экран один из оптимальных

таких маршрутов в случайном взвешенном неориентированном графе, сам план маршрута и его длину. Программный модуль имеет следующий вид:

```

Manipulate[Module[{{ style},
style = {VertexSize -> 0.2, ImagePadding -> 10,
ImageSize -> {220, 220}};
PT = First[FindPostmanTour[g]];
l = Length[PT];
LT = Total[PropertyValue[{g, #}, EdgeWeight] & /@ Edge-
List[PT]];
Grid[{{Column[{Text@
Row[{ListAnimate[
Table[HighlightGraph[g, PT[[1 ;; i]]], {i, 0, l}]}]}]}],
Text@Row[{" один из возможных маршрутов = ", PT}],
    
```

```
Text@Row[{" длина этого маршрута = ", LT}]]]]],
{{g, RG[5, 6, 5]}, None},
{{p, 5, "диапазон веса ребер p"}, 1, 10, 1, Appearance ->
"Labeled"},
{{n, 5, "количество вершин графа n"}, 2, 10, 1,
Appearance -> "Labeled"},
Control[{{m, 5, "количество ребер графа m"}, n - 1, n
(n - 1)/2, 1,
Appearance -> "Labeled"}],
Button["новый граф", g = RG[n, m, p]],
AutorunSequencing -> {3}, SaveDefinitions -> True]
```

На рисунке 4 продемонстрирован результат работы программного модуля, осуществляющего поиск оптимального маршрута, который позволяет пройти по всем ребрам графа с минимальным общим весом (длиной маршрута). Пользовательский модуль построил взвешенный граф (с диапазоном веса ребер от 1 до  $p=5$ ), число вершин этого графа  $n=6$ , число ребер –  $m=9$ . Решение представлено в виде анимации, которая иллюстрирует движение по найденному маршруту, выводится также на экран список соответствующих ребер маршрута  $1-6, 6-2, 2-6, 6-3, 3-5, 5-2, 2-3, 3-4, 4-1, 1-2, 2-1$  и его длина 27 ед.

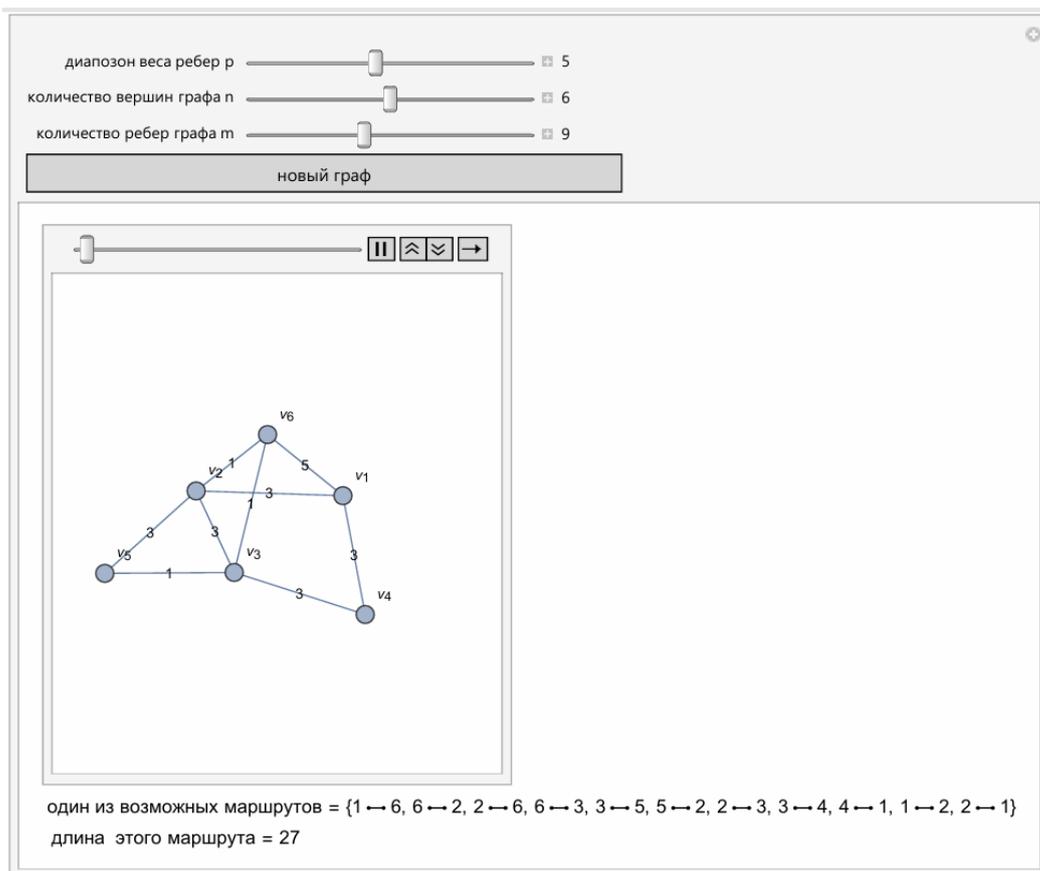


Рисунок 4 – Результат работы программного модуля поиска оптимального маршрута, который позволяет пройти по всем ребрам графа с минимальным общим весом

### Заключение

В данной статье была рассмотрена важность графов и их широкие возможности для моделирования решения практических задач с использованием системы Mathematica. Были описаны основные способы задания графов, а также методы визуализации и анализа их структуры. Особое внимание было уделено алгоритмам нахождения максимального и минимального остовного дерева, которые позволяют оптимизировать сеть, минимизируя стоимость или обеспечивая максимальную устойчивость. Кроме того, была успешно решена задача китайского почтальона, демонстрирующая применение теоретико-графовых подходов для маршрутизации в реальных условиях.

Эти исследования подчеркивают значимость сочетания теории графов и современных вычислительных технологий, таких как Mathematica, для решения сложных задач оптимизации, управления ресурсами и построения эффективных сетей. Настоящая работа может служить основой для дальнейших исследований и развития практических приложений графов в различных областях науки и техники.

### Список цитированных источников

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов [и др.]. – М. : Наука, 1990. – 390 с.

2. Карнаухова, А. А. Использование теории графов при решении задач в экономике / А. А. Карнаухова, А. Ф. Долгополова // Международный студенческий научный вестник. – 2015. – № 3, Ч. 4. – С. 468–469. – URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=14128> (дата обращения: 05.05.2025).
3. Меркулова, Ю. В. Теоретико-методологические подходы к моделированию экономических стратегий на основе использования графов / Ю. В. Меркулова // Фундаментальные исследования. – 2022. – № 8. – С. 75–88.
4. Кузьмич, П. М. Расчет календарных планов с вероятностными временными параметрами работ / П. М. Кузьмич, Л. П. Махнист, Н. В. Михайлова // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2013. – № 1 (79). – С. 139–142.
5. Чичурин, А. В. Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2013. – № 5 (83). – С. 9–14.

6. Chichurin, A. V. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient / A. V. Chichurin, H. N. Shvychkina // *Mathematical Biosciences*. – 2016. – Vol. 278. – P. 30–36.
7. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limit properties for the third order normal system of differential equations using the Mathematica system / A. Chichurin, H. Shvychkina // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics : book of abstracts of int. conf. CCMECH'2011, Siedlce, 23–28 Oct. 2011 / Dorodnitsyn Computing Centre of RAS ; Eds.: V. V. Rumiantsev [et al.]. – Siedlce, 2011. – P. 23–24.
8. Махнист, Л. П. Применение систем компьютерной алгебры при решении модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // *Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты* : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.
9. Махнист, Л. П. Использование систем компьютерной алгебры в задаче гидрологического моделирования / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // *Вычислительные методы, модели и образовательные технологии* : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест, 2021. – С. 54–56.
10. Махнист, Л. П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике* : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–18.
11. Махнист, Л. П. Об одном подходе к решению модели гидрологии с помощью систем компьютерной алгебры / Л. П. Махнист, Е. Н. Защук, И. И. Гладкий // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике* : сб. тез. докл. Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 24.
12. Чичурин, А. В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» : в 3 ч. / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина. – Брест : Белорус. гос. ун-т, 2016. – Ч. 1. – 62 с.
13. Чичурин, А. В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» : в 3 ч. / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина. – Брест : Белорус. гос. ун-т, 2017. – Ч. 2. – 60 с.
14. Чичурин, А. В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций для студентов специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)» : в 3 ч. / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина. – Брест : Белорус. гос. ун-т, 2017. – Ч. 3. – 68 с.
15. Wolfram Demonstrations Project. – URL: <https://demonstrations.wolfram.com> (date of access: 08.05.2025).
16. Швычкина, Е. Н. Использование СКА Mathematica при математической подготовке студентов в техническом университете / Е. Н. Швычкина // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике 2015* : сб. ст. докл. респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2015 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. В. Чичурина. – Брест, 2015. – С. 110–113.
17. Швычкина, Е. Н. Использование математического пакета в лекции «Знакопереключающиеся ряды» / Е. Н. Швычкина, Е. Н. Рубанова // *Вычислительные методы, модели и образовательные технологии* : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 21 окт. 2016 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2016. – С. 148–149.
18. Защук, Е. Н. Использование математического пакета в лекции «Ряды Фурье» / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Вычислительные методы, модели и образовательные технологии* : сб. материалов IX респ. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. А. Козинского. – Брест, 2020. – С. 66–67.
19. Защук, Е. Н. Компьютерная визуализация тел вращения на лекциях для студентов технических специальностей / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты* : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 38–39.
20. Защук, Е. Н. Моделирование «Полярной розы» в системах компьютерной алгебры / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Современные проблемы математики и вычислительной техники* : сб. материалов XII Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 18–19 нояб. 2021 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: В. А. Головки (гл. ред.) [и др.]. – Брест, 2021. – С. 69–70.
21. Защук, Е. Н. Компьютерная визуализация трехмерных систем координат в чтении лекций по дисциплине «Математика» / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике* : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С. 56–57.
22. Защук, Е. Н. Использование методов компьютерной алгебры в лекциях «Предел числовой последовательности и функции» / Е. Н. Защук, А. И. Жук, Л. П. Махнист // *Вестник Брестского государственного технического университета*. – 2023. – № 1 (130). – С. 125–128.
23. Защук, Е. Н. Вычислительная визуализация определения эллипса / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Вычислительные методы, модели и образовательные технологии* : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 20 окт. 2023 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест, 2023. – С. 45–46.
24. Защук, Е. Н. Вычислительная визуализация определений кривых второго порядка / Е. Н. Защук, А. И. Жук // *Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике* : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 25–27 апр. 2024 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2024. – С. 145–148.
25. Жук, А. И. Математика / А. И. Жук, Е. Н. Защук, М. С. Климчук. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2019. – 44 с.
26. Махнист, Л. П. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : практикум / Л. П. Махнист, В. С. Рубанов, И. И. Гладкий. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2016. – 82 с.
27. Юхимук, Т. Ю. Математическое программирование / Т. Ю. Юхимук, М. М. Юхимук, Л. П. Махнист. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2024. – 55 с.

## References

1. Lekcii po teorii grafov / V. A. Emelichev, O. I. Mel'nikov, V. I. Sarvanov [i dr.]. – M. : Nauka, 1990. – 390 s.
2. Kamahova, A. A. Ispol'zovanie teorii grafov pri reshenii zadach v ekonomike / A. A. Kamahova, A. F. Dolgopola // *Mezhdunarodnyj studentcheskij nauchnyj vestnik*. – 2015. – № 3, CH. 4. – S. 468–469. – URL: <https://eduherald.ru/ru/article/view?id=14128> (data obrashcheniya: 05.05.2025).
3. Merkulova, YU. V. Teoretiko-metodologicheskie podhody k modelirovaniyu ekonomicheskikh strategij na osnove ispol'zovaniya grafov / YU. V. Merkulova // *Fundamental'nye issledovaniya*. – 2022. – № 8. – S. 75–88.
4. Kuz'mich, P. M. Raschet kalendarnyh planov s veroyatnostnymi vremennymi parametrami rabot / P. M. Kuz'mich, L. P. Mahnist, N. V. Mihajlova // *Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura*. – 2013. – № 1 (79). – S. 139–142.

5. Chichurin, A. V. Komp'yuternoe modelirovanie dvuh modelej hemostata dlya odnogo pitatel'nogo re-sursa / A. V. Chichurin, E. N. SHvychkina // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo univer-siteta. Seriya: Fizika, matematika, informatika. – 2013. – № 5 (83). – S. 9–14.
6. Chichurin, A. V. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient / A. V. Chichurin, H. N. Shvychkina // Mathematical Biosciences. – 2016. – Vol. 278. – P. 30–36.
7. Chichurin, A. Finding the solutions with the infinite limit properties for the third order normal system of differential equations using the Mathematica system / A. Chichurin, H. Shvychkina // 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics : book of abstracts of int. conf. CCMECH'2011, Siedlce, 23–28 Oct. 2011 / Dorodnitsyn Computing Centre of RAS ; Eds.: V. V. Rumiantsev [et al.]. – Siedlce, 2011. – P. 23–24.
8. Mahnist, L. P. Primenenie sistem komp'yuternoj algebry pri reshenii modeli stohasticheskoj gidrologii / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Matematicheskie i fizicheskie metody issledovaniy: nauchnyj i metodicheskij aspekty : sb. materialov Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 22–23 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. N. N. Sendera. – Brest, 2021. – S. 96–98.
9. Mahnist, L. P. Ispol'zovanie sistem komp'yuternoj algebry v zadache gidrologicheskogo modelirovaniya / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Vychislitel'nye metody, modeli i obrazovatel'nye tekhnologii : sb. materialov Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 22 okt. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. D. V. Gricuka. – Brest, 2021. – S. 54–56.
10. Mahnist, L. P. K resheniyu zadachi gidrologii s ispol'zovaniem sistem komp'yuternoj algebry / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike : sb. materialov Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 28–29 apr. 2022 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. I. Basika. – Brest, 2022. – S. 17–18.
11. Mahnist, L. P. Ob odnom podhode k resheniyu modeli gidrologii s pomoshch'yu sistem komp'yuternoj algebry / L. P. Mahnist, E. N. Zashchuk, I. I. Gladkij // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike : sb. tez. dokl. Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 28–29 apr. 2022 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. N. N. Sendera. – Brest : BrGU, 2022. – S. 24.
12. Chichurin, A. V. Primenenie sistemy Mathematica pri reshenii differencial'nyh uravnenij i v zadachah matematicheskogo modelirovaniya : kurs lekcij dlya studentov special'nosti 1-31 03 01 «Matematika (po napravleniyam)» : v 3 ch. / A. V. Chichurin, E. N. SHvychkina. – Brest : Belarus. gos. un-t, 2016. – CH. 1. – 62 s.
13. Chichurin, A. V. Primenenie sistemy Mathematica pri reshenii differencial'nyh uravnenij i v zadachah matematicheskogo modelirovaniya : kurs lekcij dlya studentov special'nosti 1-31 03 01 «Matematika (po napravleniyam)» : v 3 ch. / A. V. Chichurin, E. N. SHvychkina. – Brest : Belarus. gos. un-t, 2017. – CH. 2. – 60 s.
14. Chichurin, A. V. Primenenie sistemy Mathematica pri reshenii differencial'nyh uravnenij i v zadachah matematicheskogo modelirovaniya : kurs lekcij dlya studentov special'nosti 1-31 03 01 «Matematika (po napravleniyam)» : v 3 ch. / A. V. Chichurin, E. N. SHvychkina. – Brest : Belarus. gos. un-t, 2017. – CH. 3. – 68 s.
15. Wolfram Demonstrations Project. – URL: <https://demonstrations.wolfram.com> (date of access: 08.05.2025).
16. SHvychkina, E. N. Ispol'zovanie SKA Mathematica pri matematicheskoj podgotovke studentov v tekhnicheskoy universitete / E. N. SHvychkina // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike 2015 : sb. st. dokl. resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 23–24 apr. 2015 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. V. Chichurina. – Brest, 2015. – S. 110–113.
17. SHvychkina, E. N. Ispol'zovanie matematicheskogo paketa v lekciy «Znakocheduyushchiesya ryady» / E. N. SHvychkina, E. N. Rubanova // Vychislitel'nye metody, modeli i obrazovatel'nye tekhnologii : sb. materialov Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 21 okt. 2016 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. O. V. Matsyika. – Brest, 2016. – S. 148–149.
18. Zashchuk, E. N. Ispol'zovanie matematicheskogo paketa v lekciy «Ryady Fur'e» / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Vychislitel'nye metody, modeli i obrazovatel'nye tekhnologii : sb. materialov IX resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 22 okt. 2020 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. A. Kozinskogo. – Brest, 2020. – S. 66–67.
19. Zashchuk, E. N. Komp'yuternaya vizualizatsiya tel vrashcheniya na lekciyah dlya studentov tekhnicheskikh special'nostej / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Matematicheskie i fizicheskie metody issledovaniy: nauchnyj i metodicheskij aspekty : sb. materialov Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 22–23 apr. 2021 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. N. N. Sendera. – Brest, 2021. – S. 38–39.
20. Zashchuk, E. N. Modelirovanie «Polyarnoj rozy» v sistemah komp'yuternoj algebry / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Sovremennyye problemy matematiki i vychislitel'noj tekhniki : sb. materialov XII Resp. nauch. konf. molodyh uchenykh i studentov, Brest, 18–19 noyab. 2021 g. / Brest. gos. tekhn. un-t ; redkol.: V. A. Golovko (gl. red.) [i dr.]. – Brest, 2021. – S. 69–70.
21. Zashchuk, E. N. Komp'yuternaya vizualizatsiya trekhmernykh sistem koordinat v chtenii lekcij po disciplinе «Matematika» / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike : sb. materialov Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 28–29 apr. 2022 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. I. Basika. – Brest, 2022. – S. 56–57.
22. Zashchuk, E. N. Ispol'zovanie metodov komp'yuternoj algebry v lekciyah «Predel chislovoj posledo-vatel'nosti i funkciy» / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk, L. P. Mahnist // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2023. – № 1 (130). – S. 125–128.
23. Zashchuk, E. N. Vychislitel'naya vizualizatsiya opredeleniya ellipsa / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Vychislitel'nye metody, modeli i obrazovatel'nye tekhnologii : sb. materialov Resp. nauch.-prakt. konf., Brest, 20 okt. 2023 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. D. V. Gricuka. – Brest, 2023. – S. 45–46.
24. Zashchuk, E. N. Vychislitel'naya vizualizatsiya opredelenij krivykh vtorogo poryadka / E. N. Zashchuk, A. I. ZHuk // Matematicheskoe modelirovanie i novye obrazovatel'nye tekhnologii v matematike : sb. materialov Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Brest, 25–27 apr. 2024 g. / Brest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. red. A. I. Basika. – Brest, 2024. – S. 145–148.
25. ZHuk, A. I. Matematika / A. I. ZHuk, E. N. Zashchuk, M. S. Klimchuk. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2019. – 44 s.
26. Mahnist, L. P. Ekonometrika i ekonomiko-matematicheskie metody i modeli : praktikum / L. P. Mah-nist, V. S. Rubanov, I. I. Gladkij. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2016. – 82 s.
27. YUhimuk, T. YU. Matematicheskoe programmirovaniye / T. YU. YUhimuk, M. M. YUhimuk, L. P. Mahnist. – Brest : Brest. gos. tekhn. un-t, 2024. – 55 s.

*Материал поступил 05.05.2025, одобрен 29.05.2025, принят к публикации 29.05.2025*