УДК 539.3

ОЦЕНКА ДОПУСТИМОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ ПРЯМОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Б. Г. Холодарь

К. т. н., доцент, старший научный сотрудник научно-исследовательской части УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: hbg@list.ru

Реферат

Допустимая нагрузка на сжимаемый стержень назначается исходя из условия обеспечения упругого характера его работы. В рассматриваемом случае потеря работоспособности стержня может быть вызвана продольными сжимающими усилиями, которым соответствуют как однородные напряжения сжатия, так и изгибные деформации, чье появление связано с потерей устойчивости стержня. Опасный уровень этих усилий зависит от гибкости стержня, и условия для их ограничения могут быть построены, ориентируясь на предел текучести материала и критическую нагрузку потери устойчивости. Наличие исходных несовершенств стержня и несовершенств условий его нагружения вызывают необходимость в снижении уровня рабочих нагрузок в связи с возможностью развития недопустимого уровня изгибных деформаций. Это в особенности касается стержней с высокой гибкостью. В статье рассматривается вопрос о величине продольной нагрузки, вызывающей выход материала стержня из упругой стадии работы при нескольких видах геометрических несовершенств, связанных с характером установки стержня на опорах (три схемы – с фиксированным эксцентриситетом, две – с исходной погибью, одна схема – эксцентриситет, зависящий от прогиба). Задачи ставятся в статической постановке, большие перемещения и закритические деформации стержня не рассматриваются. Статья иллюстрирована графиками и таблицами, в которых для стержней квадратного и круглого сечений в зависимости от уровня исходных несовершенств системы приводятся данные о параметрах нагрузки, вызывающей появление неупругой деформации материала, и соответствующих ей величинах максимального прогиба и угла поворота опорного сечения. Приведенные результаты и их анализ показывают, что определение допустимой нагрузки может быть основано на линеаризованном подходе, используемом в технической теории изгиба стержней, что существенно облегчает решение вопроса.

Ключевые слова: устойчивость, предел текучести, критическая деформация, допустимая нагрузка, уровень несовершенства.

ESTIMATION OF ALLOWABLE LOAD IN LONGITUDINAL COMPRESSION STRAIGHT ELASTIC ROD

B. G. Kholodar

Abstract

The permissible load on a compressible rod is determined on the basis of the following conditions elastic character of its operation. In the case under consideration, the loss of performance of the rod can be caused by longitudinal compressive forces, which correspond to both homogeneous compression stresses and bending deformations, whose occurrence is associated with the loss of stability of the rod. The dangerous level of these forces depends on the flexibility of the rod, and the conditions for their limitation can be constructed by focusing on the yield strength of the material and the critical load of loss of stability. The presence of initial imperfections of the rod and imperfections of its loading conditions make it necessary to reduce the level of working loads due to the possibility of developing an unacceptable level of bending deformations. This is especially true for rods with high flexibility. The paper deals with the question of the magnitude of the longitudinal load causing the rod material to leave the elastic stage of operation under several types of geometrical imperfections related to the nature of the rod installation on the supports (three schemes – with fixed eccentricity, two schemes – with initial perdition, one scheme – eccentricity depending on the deflection). The problems are posed in a static formulation, large displacements and subcritical deformations of the rod are not considered. The paper is illustrated with graphs and tables in which, for square and circular bars, depending on the level of initial imperfections in the system, data are given on the parameters of the load causing inelastic deformation of the material and the corresponding values of the maximum deflection and the angle of rotation of the support section. The above results and their analysis show that the determination of the allowable load can be based on the linearized approach used in the technical theory of rod bending, which significantly facilitates the solution of the question.

Keywords: stability, yield strength, critical strain, allowable load, imperfection level.

1 Введение

Допустимая нагрузка при продольном статическом сжатии упругого стержня постоянного сечения назначается как доля от предельной упругой $P_T = E\varepsilon_{TC}A$ или от критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости стержня и устанавливаемой формулой Эйлера $P_{кр} = \pi^2 E J_z / L^2$, где E – модуль упругости, J_z – соответствующий момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, L – приведенная длина стержня, определяемая граничными условиями его закрепления, ε_{TC} – деформация предела текучести материала при сжатии (далее пределы пропорциональности и текучести отождествляются), A – площадь поперечного сечения. Применение формулы Эйлера ограничено областью упругой работы материала стержня, которая зависит от его гибкости $\lambda = L/i$, где $i^2 = J_z/A$ – радиус инерции сечения. Вместе с тем, наличие физических и геометрических несовершенств стержня и условий его нагружения, таких как неоднородность материала и его механических свойств, начальная погибь, отклонение нагрузки от продольной оси крепления стержня и др., создают предпосылки возникновения изгибной формы равновесия и соответствующих деформаций, дополнительных к однородным сжимающим. Поэтому вопрос об определении допустимого уровня нагружения связан с учетом имеющихся несовершенств системы.

Параметр λ является чисто геометрической характеристикой стержня, не зависит от свойств его материала и даже однозначно не определяет распределение изгибных напряжений в сечении, поэтому границу области упругой работы удобнее, на наш взгляд, охарактеризовать величиной критической деформации сжатия, которую определим как $\varepsilon_{кр} = P_{кр}/EA = \pi^2 i^2/L^2$. Величины $\varepsilon_{кр}$ и λ связаны между собой зависимостью $\varepsilon_{кр} = \pi^2/\lambda^2$.

Параметр $\varepsilon_{кр}$ является достаточно прозрачным с физической точки зрения и связывает механические и геометрические характеристики материала и конструкции. Условие упругого нагружения в данном случае запишется как $\varepsilon_{кр} < \varepsilon_T$, где ε_T – деформация предела текучести. Для конструкционной мягкой стали она составляет $\varepsilon_T \approx 1 \cdot 10^{-3}$, чему соответствует значение гибкости $\lambda \approx 100$, которым обычно и принято ограничивать зону упругой работы стержня в данной задаче.

Вопрос о потере устойчивости упругого стержня решается, исходя из различных подходов [1–5], как точных, основанных на аналитическом решении соответствующих дифференциальных уравнений, так и приближенных (энергетических) [6–10]. В большинстве случаев

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-110-115

используется линеаризованная форма выражения для кривизны оси стержня $\varkappa = w''/(1+w'^2)^{3/2} \approx w''$, где $w = w(x)$ – прогиб стержня в точке с координатой x, а в дифференциальном уравнении изгиба выражение для момента $M(x)$ записывается с учетом наличия рассматриваемых отклонений от идеализированного прямолинейного состояния стержня. В случае классической задачи Эйлера уравнение имеет вид

$$w''+P/EJ_z \cdot w = 0, \quad (1)$$

в котором скрыты фактические причины появления изогнутой формы равновесия. При линеаризованном подходе суждение о потере устойчивости выносится из условия реализации бесконечного прогиба стержня, которое приводит к определению критической нагрузки через значения собственных чисел дифференциального уравнения (1). Вопрос о реалистичности бесконечного прогиба стержня при этом опускается [8, стр. 123].

Выполнение ограничений по λ или $\varepsilon_{кр}$ не отменяет, однако возможности развития вызываемых изгибом пластических деформаций в материале, появление которых в данном случае является недопустимым, препятствующим возврату стержня в исходное состояние после снятия внешнего воздействия, и может соответствовать нагрузке меньше критической. Это, в свою очередь, влияет на выбор расчетного коэффициента безопасности [4, 5, 10].

Таким образом, задача о допустимой нагрузке при продольном сжатии стержня фактически приводится к решению задачи прочности.

Указанные обстоятельства, связанные с поведением сжатого стержня и определением критической нагрузки, широко известны и обсуждены в соответствующей литературе, однако числовые данные, иллюстрирующие вступление материала стержня в упруго-пластическое состояние, в значительной степени ограничены [4]. Ниже даны результаты решения нескольких задач о продольном нагружении возрастающей нагрузкой шарнирно-опертого стержня, которые позволяют более наглядно подойти к рассмотрению данного вопроса.

Вопросы, касающиеся поведения стержня после появления в нем пластических деформаций, в данной статье не рассматриваются. С особенностями поведения стержней в такого рода случаях, в том числе применительно к железобетонным колоннам, вязкоупругим материалам, а также при действии быстронарастающих и ударных нагрузок, можно познакомиться по многочисленным источникам как обзорного, так и более узкого характера в отечественной и зарубежной литературе [1, 2, 11–20].

2 Постановка и решение задачи, обсуждение результатов

2.1. Несовпадение продольных усилий с направлением оси крепления может соответствовать схемам, приведенным на рисунке 1, на котором показаны также и использованные далее при выводе уравнений расчетные схемы. Схемы 1 и 2 рассмотрены в [1, 3] при условии совпадения величин эксцентриситетов на опорах.

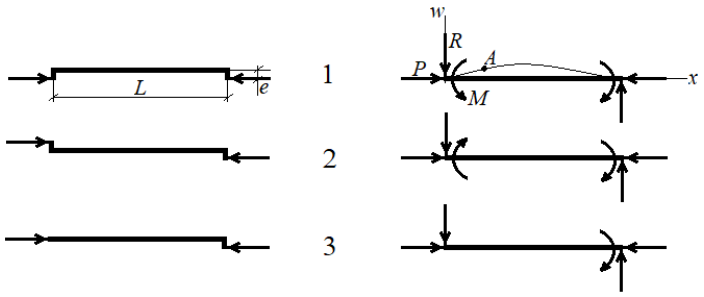


Рисунок 1 – Схемы нагружения

Используя дифференциальное уравнение изогнутой оси первоначально прямого стержня

$$w'' = -M(x)/EJ_z$$

и записав момент $M(x)$ от реактивных силовых факторов P, R, M на левой опоре относительно произвольной точки A оси, уравнения изгиба для схем 1, 2, 3 получим в виде

$$w''+k^2w = -M_R(x)/EJ_z, \quad (2)$$

где $k^2=P/EJ_z$, $M_R(x)$ – момент от поперечной силы и сосредоточенного момента.

Для случая стержня с исходной погибью $w_{исх}$ (случай 4) учитываем, что моменты в сечениях стержня пропорциональны изменению кривизны $\varkappa$ по отношению к исходной $\varkappa_{исх}$, в связи с чем дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид

$$w'' - w_{исх}'' = -M(x)/EJ_z,$$

откуда, приняв для $w_{исх}$ синусоидальный закон $w_{исх} = w_0 Sin(nx)$, где $n = \pi m/L$, $m=1,2,3,\ldots$, удовлетворяющий условиям шарнирного крепления, получаем

$$W''+K^2W = -N^2 \cdot W_0 SIN(NX). \quad (3)$$

Схемы “1–3” можно свести к общему виду, приняв, что в схеме “2” эксцентриситеты на левой и правой опорах составляют $e_1 = \alpha_1 e$ и $e_2 = \alpha_2 e$ (далее $\alpha_2 = 1$, $-1 \le \alpha_1 \le 1$). В этом случае зависимости для перемещения и момента вдоль оси X получают вид:

$$w(x) = e\left(\left(-\alpha_1 Sin(kL-kx) + \alpha_2 Sin(kx)\right) / Sin(kL) + \alpha_1 - (\alpha_1+\alpha_2)\frac{kx}{kL} \right)$$

$$M(x) = Pe\left(-\alpha_1 Sin(kL-kx) + \alpha_2 Sin(kx)\right) / Sin(kL). \quad (4)$$

Для случая 4 согласно (3):

$$w(x) = w_0 \frac{n^2}{n^2-k^2}\left(-\frac{Sin(nL)}{Sin(kL)} Sin(kx) + Sin(nx)\right)$$

$$M(x) = Pw(x). \quad (5)$$

Обозначив через $\gamma = P/P_{кр}$ величину относительной продольной силы, имеем $kL = \pi\gamma^{1/2}$.

Для случаев 1–3 при небольших нагрузках максимальный момент сосредоточен в опорном сечении, но начиная с некоторого уровня γ момент $M(x)$ приобретает экстремальное значение в пределах длины стержня.

Используя (4)–(5) и определив на оси X точку x_M, в которой изгибающий момент принимает наибольшую величину, условия выхода суммарных деформаций стержня от сжатия и изгиба на уровень ε_T получим в виде:

$$\gamma\left(1 \pm \frac{eA}{W_z} F(\gamma)\right) = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{кр}} \text{ и } \gamma\left(1 \pm \frac{w_0 A}{W_z} F(\gamma)\right) = \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{кр}}, \quad (6)$$

где через W_z обозначен момент сопротивления сечения, а функции $F(\gamma)$ равны:

$$F(\gamma) = \left(-\alpha_1 Sin(kL - kx_M) + \alpha_2 Sin(kx_M)\right) / Sin(kL) \quad \text{– для случаев 1–3}$$

$$F(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma^2}\left(-\frac{Sin(nL)}{Sin(kL)} Sin(kx_M) + Sin(nx_M)\right) \quad \text{– для случая 4.} \quad (7)$$

Первое слагаемое в скобках выражений (6) отражает роль сжатия, второе – изгиба, знаки “+” и “–“ относятся к сжатым и растянутым волокнам соответственно.

Входящие в (6) сомножители eA/W_z и w_0A/W_z можно выразить в виде отношения e/h и w_0/h (для прямоугольника $eA/W_z = 6e/h$, для круга $eA/W_z = 8e/d$, аналогично для w_0A/W_z), что является более наглядным и сразу позволяет сделать вывод, что для стержня с сечением в виде круга влияние изгибного слагаемого в (6) сказывается сильнее.

2.2. Далее для сравнения рассматриваются прямоугольное (ширина b и высота h) и круглое (диаметр d) сечения с размерами $b = h = d = 1$ *см* при двух длинах стержней ($L = 100$ и $L = 100/3$ *см*).

Приведенные ниже расчетные данные показывают, что вступление материала в состояние текучести может достигаться при нагрузке P_T значительно ниже критической $P_{кр}$. Для материала с одинаковыми уровнями деформаций текучести при растяжении и сжатии $\varepsilon_{TP} = \varepsilon_{TC}$ текучесть, естественно, первоначально всегда появится в сжатых волокнах, но при $\varepsilon_{TP} < \varepsilon_{TC}$ может иметь место и противоположный результат, учитывая тем более, что с ростом гибкости стержня критическая деформация $\varepsilon_{кр}$ падает, а роль изгибного слагаемого увеличивается.

В таблицах 1–5 приведены расчетные данные для стержней длиной $L = 100/3$ *см* прямоугольного и кругового сечений, для которых значения гибкости, критических деформациях и сил соответственно равны $\lambda = 115.47$ и $\lambda = 133.33$, $\varepsilon_{кр} = 0.7402e\text{-}3$ и $\varepsilon_{кр} = 0.5552e\text{-}3$, $P_{кр} = 14804.4$ *Н* и $P_{кр} = 8720.5$ *Н* (для случая 4 принято $m=1$).

В таблицах 1–3 через дробь указаны значения относительной критической силы $\gamma_T = P_T/P_{кр}$, при которых в стержнях достигается предел текучести материала. Случаям, когда для выбранной геометрии при $\gamma \le 1$ текучесть не достигается, соответствуют прочерки в таблице. Из таблиц видно, что уровни γ_T монотонно снижаются с ростом e и w_0, перемещения и углы растут, уровни γ_{TC}, определенные для сжатых волокон, ниже, чем для растянутых γ_{TP}. На рисунке 2 данные таблицы 1, 2 проиллюстрированы графиками. Видна близость результатов по схемам 1 и 4.

В таблицах 4–5 также через дробь указаны значения максимальных прогибов W_{max} и производной $W' = dw/dx$ в точке $x = 0$ при достижении предела текучести в сжатом поверхностном слое сечения. Поскольку $b = h = d = 1$ *см*, то отношение W_{max}/h численно равно значению W_{max}, и из таблиц видно, что для случаев 1–3 оно не превышает значения 0.23, $W_{max}/L \le 0.007$, а значение $W' \le 0.025$. Для случая 4 перемещения и углы поворота выше, чем для случаев 1–3: для $w_0 = 0.5$ имеем $W_{max}/h \le 0.7$, $W_{max}/L \le 0.02$, $W' \le 0.07$.

В качестве примера на рисунке 3 (по исходным данным таблицы 2, случай 3) показаны графики изменения отношения $\varepsilon_T/\varepsilon_{кр}$ в зависимости от уровня нагрузки при эксцентриситетах $e=0.1$ и $e=0.3$. Верхние кривые соответствуют сжатию, нижние – растяжению.

Аналогичные по тенденциям результаты при тех же уровнях $\varepsilon_{TC} = 1.0e\text{-}3$ и $\varepsilon_{TP} = 0.8e\text{-}3$ имеют место для более гибкого стержня длиной $L = 100$ *см*, которой для прямоугольной и круговой форм сечения отвечают значения $\lambda = 346.41$, $\varepsilon_{кр} = 0.0822e\text{-}3$ и $\lambda = 400.00$, $\varepsilon_{кр} = 0.0617e\text{-}3$. Но в этом случае в отличие от предыдущих результатов возникновение первоначальной текучести происходит на растянутых, а не сжатых волокнах, что свидетельствует о возрастании опасности выхода конструкции из строя. Не приводя данные по всем ячейкам таблиц, укажем для примера в том же формате результаты расчета γ_T для прямоугольного сечения при $e = w_0 = 0.20$: схема 1 – $0.8837/0.8774$, схема 2 – текучесть не достигается, схема 3 – $0.9371/0.9341$, схема 4 – $0.9037/0.8985$. При этом максимальные расчетные перемещения для $e = w_0 = 0.02 \div 0.50$ лежат в пределах $3.8–5.1$*см*, что заметно выше данных таблиц 4–5. Отношение W_{max}/L не превышает $5.0e\text{-}2$.

Таблица 1 – Прямоугольник, $\lambda = 115.47$; $\varepsilon_{кр} = 0.7402e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC} = \varepsilon_{TP} = 1.0e\text{-}3$

№	Уровни несовершенства $e=w_0$, *см*. Относительная нагрузка γ_{TC}/γ_{TP}					
	$e= w_0=0.02$	$e= w_0=0.10$	$e= w_0=0.20$	$e= w_0=0.30$	$e= w_0=0.40$	$e= w_0=0.50$
1	0.7936/0.9381	0.5421/0.7451	0.4146/0.5841	0.3411/0.4756	0.2916/0.3986	0.2556/0.3426
2	- / -	0.8416 / -	0.5916/ -	0.4376 / -	0.3341 /0.9641	0.2611/0.6216
3	0.8671/0.9686	0.6546/0.8561	0.5246/0.7401	0.4406/0.6441	0.3786/0.5631	0.3306/0.4941
4	0.8166/0.9506	0.5666/0.7801	0.4336/0.6216	0.3561/0.5081	0.3036/0.4251	0.2656/0.3636

Таблица 2 – Прямоугольник, $\lambda = 115.47$; $\varepsilon_{кр} = 0.7402e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC} = 1.0e\text{-}3$; $\varepsilon_{TP} = 0.8e\text{-}3$

№	Уровни несовершенства $e=w_0$, *см*. Относительная нагрузка γ_{TC}/γ_{TP}					
	$e=w_0=0.02$	$e=w_0=0.10$	$e=w_0=0.20$	$e=w_0=0.30$	$e=w_0=0.40$	$e=w_0=0.50$
1	0.7936 / 0.9306	0.5423/0.7162	0.4144/0.5432	0.3411/0.4313	0.2918/0.3549	0.2558/0.3001
2	- / -	0.8416/ -	0.5916/ -	0.4374/ -	0.3341/0.7411	0.2613/0.4343
3	0.8669/0.9643	0.6547/0.8383	0.5246/0.7094	0.4404/0.6035	0.3787/0.5153	0.3307/0.4413
4	0.8166/0.9441	0.5666/0.7535	0.4333/0.5806	0.3560/0.4614	0.3038/0.3780	0.2657/0.3180

Таблица 3 – Круг, $\lambda=133.33$; $\varepsilon_{кр}= 0.5552e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC}=1.0e\text{-}3$; $\varepsilon_{TP}=0.8e\text{-}3$

№	Уровни несовершенства $e=w_0$, *см*. Относительная нагрузка γ_{TC}/γ_{TP}					
	$e=w_0=0.02$	$e=w_0=0.10$	$e=w_0=0.20$	$e=w_0=0.30$	$e=w_0=0.40$	$e=w_0=0.50$
1	0.8322/0.9220	0.5727/0.6933	0.4351/0.5200	0.3563/0.4119	0.3035/0.3393	0.2651/0.2876
2	- / -	0.9999/ -	0.6760/ -	0.4871/ -	0.3648/0.5964	0.2812/0.3694
3	0.9004/0.9597	0.6938/0.8212	0.5570/0.6849	0.4666/0.4619	0.4003/0.4888	0.3486/0.4167
4	0.8553/0.9370	0.6002/0.7308	0.4566/0.5551	0.3731/0.4393	0.3169/0.3601	0.2760/0.3037

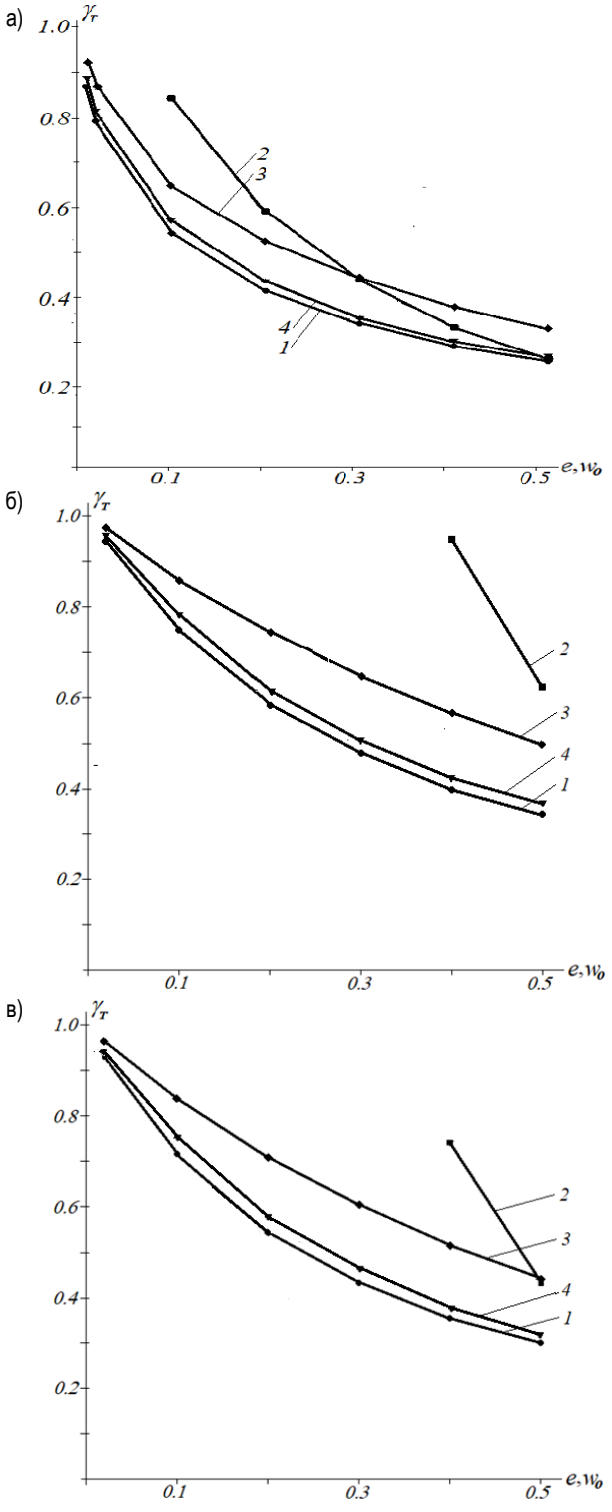
Таблица 4 – Прямоугольник, $\lambda = 115.47$; $\varepsilon_{кр} = 0.7402e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC} = \varepsilon_{TP} = 1.0e\text{-}3$

№	Уровни несовершенства $e=w_0$, *см*. Перемещения / повороты					
	$e=w_0=0.02$	$e=w_0=0.10$	$e=w_0=0.20$	$e=w_0=0.30$	$e=w_0=0.40$	$e=w_0=0.50$
1	0.0972/0.0097	0.1484/0.0158	0.1769/0.0194	0.1935/0.0216	0.2049/0.0231	0.2134/0.0242
2	- / -	0.0168/0.0049	0.0219/0.0065	0.0233/0.0070	0.0231/0.0069	0.0221/0.0067
3	0.0827/0.0076	0.1197/0.0105	0.1393/0.0119	0.1491/0.0126	0.1538/0.0128	0.1559/0.0129
4	0.1091/0.0103	0.2307/0.0217	0.3528/0.0333	0.4659/0.0439	0.5744/0.0541	0.6808/0.0642

Таблица 5 – Круг, $\lambda = 133.33$; $\varepsilon_{кр} = 0.5552e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC} = \varepsilon_{TP} = 1.0e\text{-}3$

№	Уровни несовершенства $e=w_0$, *см*. Перемещения / повороты					
	$e=w_0=0.02$	$e=w_0=0.10$	$e=w_0=0.20$	$e=w_0=0.30$	$e=w_0=0.40$	$e=w_0=0.50$
1	0.1256/0.0124	0.1682/0.0158	0.1925/0.0210	0.2070/0.0230	0.2169/0.0244	0.2242/0.0254
2	- / -	0.0210/0.0060	0.0257/0.0076	0.0263/0.0079	0.0254/0.0077	0.0239/0.0073
3	0.1148/0.0106	0.1432/0.0127	0.1586/0.0137	0.1656/0.0140	0.1685/0.0141	0.1689/0.0140
4	0.1382/0.0130	0.2501/0.0236	0.3681/0.0347	0.4785/0.0451	0.5856/0.0552	0.6906/0.0651

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-110-115



"а" – сжатые волокна (таблица 1), "б", "в" – растянутые волокна (таблица 1, 2)

Рисунок 2 – Зависимости $\gamma_т$ от уровня эксцентриситета e и исходной погиби w_0

Для материалов, у которых предел текучести на растяжение $\sigma_{тр}$ значительно ниже предела текучести на сжатие $\sigma_{тс}$ (например, высокопрочный бетон), уровень $\gamma_{тр}$ может оказаться меньше $\gamma_{тс}$ даже при невысоких значениях λ. Например, при $\varepsilon_{тр} = 0.1\varepsilon_{тс}$ для короткого стержня (L = *100/3 см*) это становится возможным уже при $e/d = 0.024$ для круглого и $e/h = 0.069$ для прямоугольного сечений при небольших уровнях перемещений.

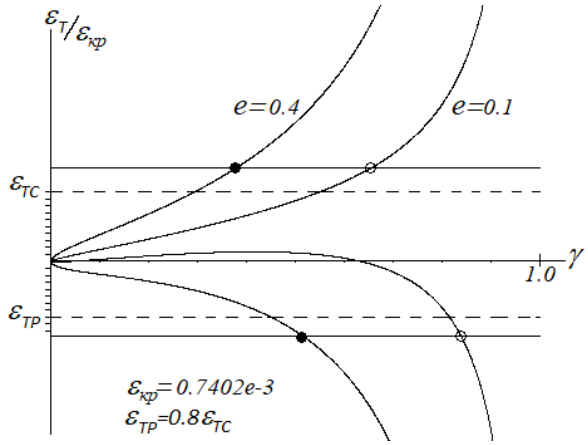


Рисунок 3 – Деформация поверхностных слоев стержня в зависимости от нагрузки

Зависимости (6) можно применить и для случая несимметричного сечения, учтя в расчетах отличие моментов сопротивления для сжатых и растянутых волокон.

Естественно, что при выборе исходной погиби стержня вместо полусинусоиды в иной подходящей условиям закрепления форме, например параболы, результаты расчетов не могут существенно отличаться от приведенных выше.

Ввиду линейности постановки задачи совместное присутствие в ее условиях и эксцентриситета e и начальной погиби $w_{исх}$ влияет только на уровни $\gamma_т$, не внося особенностей в решение и соответствующие выводы. При этом простое суммирование результатов не имеет места в связи с различием положения точек максимального момента на оси стержня для случаев 1–4.

Указанные в таблицах 4–5 результаты показывают, что по крайней мере для рассмотренных исходных числовых данных расчетные значения W_{max}/h и $W_0'^2$ таковы, что укладываются в принятые ограничения технической теории изгиба стержней, поэтому, не прибегая к рассмотрению задачи в нелинейной постановке, можно, исходя из физически обусловленного критерия $\gamma = \gamma_т$, использовать результаты линейной теории для практических расчетов допустимых усилий продольного сжатия, корректируемых далее соответствующими коэффициентами безопасности. При этом следует иметь в виду, что учет динамичности конструкции может внести свои изменения, например, при нагружении силой, возрастающей с постоянной скоростью, переход напряжений через предел текучести возникает при нагрузках более низких, чем это ожидается при статическом подходе [13, 14].

2.3. Выше рассматривалась система с исходной погибью стержня между опорами в виде полуволны синусоиды $w_{исх} = w_0 Sin(nx)$, что автоматически удовлетворяло условию шарнирного закрепления концов. Однако несовершенство стержня может проявиться также через отличие фактической длины полуволны синусоиды L_1 от наперед заданного расстояния между опорами L (рисунок 4).

В этом случае $w_{исх} = w_0 Sin(n_1 x)$, $w_{исх}(L) \neq 0$, $n_1 = \pi/L_1 = \pi\Psi/L$, $\Psi = L/L_1$. Если на изогнутом стержне взять отрезок длиной L и, повернув его на угол α, установить на прежних опорах, то его кривизна относительно оси X изменится, приняв вид

$w_{исх}'' = -w_0 n^2 Sin(n_1 x)/(w_0\, n_1 Sin\alpha Cos(n_1 x) + Cos\alpha)^3$,

где $\alpha \approx arcSin(w_0 Sin(\pi\Psi)/L)$. Для рассматриваемых в задаче числовых данных первое слагаемое в знаменателе имеет величину не более *0.001* и потому сам знаменатель незначительно отличается от постоянной величины $Cos^3(\alpha) \approx 1$. Включив ее в значение w_0, получаем для кривизны $w_{исх}''$ выражение, по форме совпадающее с использованным ранее.

При этом зависимость $w(x)$ для прогиба оси вместо (7) запишется в виде

$$w(x) = w_0 \frac{\psi^2}{\psi^2 - \gamma}\left(-\frac{Sin(n_1 L)}{Sin(kL)} Sin(kx) + Sin(n_1 x)\right), \quad n_1 L = \pi\psi$$

и на первый взгляд указывает на возможность появления бесконечных перемещений при $\gamma = \psi^2$, что с учетом $M(x) = P_{кр}\gamma w(x)$

при значении $\psi < 1$ соответствовало бы появлению критической нагрузки ниже эйлеровой. Это, однако, не имеет места, поскольку предел выражения $\gamma w(x)$ равен бесконечности только при $\gamma = \psi^2 = 1$. Расчеты показывают, что данный вид несовершенства сравнительно со случаем $\psi = 1$ при одинаковых значениях w_0 увеличивает уровень γ_T для $\psi < 1$ и уменьшает его для $\psi > 1$, в связи с тем, что для таким образом установленных стержней максимальное отклонение точек от оси нагружения и их кривизна в случае $\psi > 1$ выше, чем при $\psi < 1$. В случае $\psi > 1$ на стержне также имеет место наличие участков с кривизной противоположных знаков. В качестве примера приведем данные для стержня прямоугольного сечения при $L = 100/3$ и $\varepsilon_{TC} = \varepsilon_{TP} = 1.0e\text{-}3$:
$\psi = 0.9$ – $\gamma_{TC}/\gamma_{TP} = 0.4681 / 0.6681$; $\psi = 1.0$ – $\gamma_{TC}/\gamma_{TP} = 0.4336 / 0.6221$;
$\psi = 1.1$ – $\gamma_{TC}/\gamma_{TP} = 0.4081 / 0.5866$.

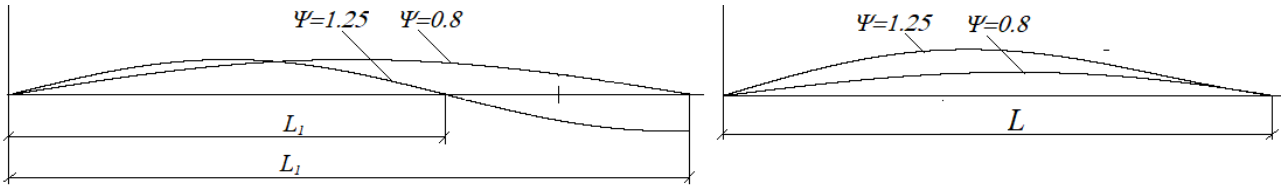


Рисунок 4 – Стержни с разной формой исходной погиби

2.4. Характерной особенностью рассмотренных выше задач является приложение продольной нагрузки в определенных фиксированных на стержне точках. Вместе с тем вполне реально предположить, что точка приложения нагрузки с ее ростом может смещаться относительно тела стержня. Например, это будет иметь место при нагружении стержня прямоугольного сечения с исходной погибью и плоским торцом через деформируемую прокладку между стержнем и силовозбудителем (рисунок 5). Примем, что ее модуль упругости $E_П = \omega E$ составляет некоторую долю ω от модуля E, толщина равна t_0, из возникающих в ней при деформации напряжений учитываются только нормальные, направленные вдоль оси X (т. е. прокладка эквивалентна набору независимых параллельных пружин). Локальная податливость материала стержня в зоне нагружения не учитывается.

При движении контактной поверхности прокладки на расстояние s и сопутствующего поворота стержня от начального угла α_0 до текущего значения α максимальное обжатие материала прокладки составит $s+u$, соответствующее напряжение $\sigma = E_П \cdot (s+u)/t_0$. Характер эпюр напряжений в зависимости от величины смещения s показан на рисунке 5.

Для эпюры треугольной формы равнодействующая сила P и ее эксцентриситет e_s относительно опорной точки описываются выражениями

$$P = \frac{E_П b}{2t_0}(s + \frac{h}{2}(Sin\alpha - Sin\alpha_0))^2 (Tg\alpha - \frac{1}{Tg\alpha}),$$

$$e_s = \frac{h}{2}Cos\alpha + \frac{1}{3}(s + \frac{h}{2}(Sin\alpha - Sin\alpha_0))(Tg\alpha - \frac{1}{Tga}),$$

для второй эпюры выражения не приводятся ввиду их громоздкости. При вычислениях значения e_s использовались по данным с предыдущего шага по s. Расчетная схема задачи соответствует случаю 3 на рисунке 1.

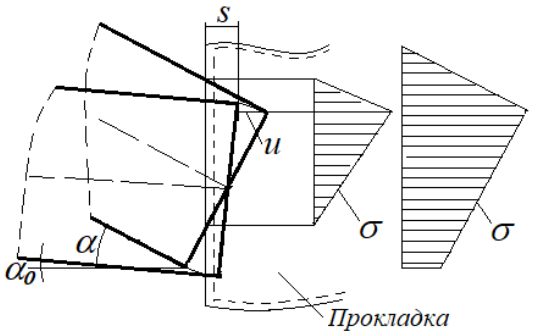


Рисунок 5 – Схема нагружения стержня через торцевую прокладку

Изгибающий момент в сечениях стержня и его прогиб имеют вид:

$$M(x) = P\frac{A}{Wz}\left(e_s Sin(kx)/Sin(kL) + w_0 \frac{n^2}{n^2 - k^2}(\frac{Sin(nL)}{Sin(kL)}Sin(kx) - Sin(nx))\right)$$

$$w(x) = e_s(Sin(kx)/Sin(kL) - \frac{kx}{kL}) + w_0 \frac{n^2}{n^2 - k^2}(-\frac{Sin(nL)}{Sin(kL)}Sin(kx) + Sin(nx)).$$

С использованием уравнения типа (6) можно определить величину относительной нагрузки γ_T, при которой в сжимаемом стержне появляются неупругие деформации.

В данной задаче имеет место совместное и взаимозависимое действие исходной погиби стержня и эксцентриситета приложения нагрузки. На начальном этапе нагружения эксцентриситет всегда понижается, но с ростом силы P при малых значениях параметра ω равнодействующая может оказаться приложенной и на боковой поверхности стержня. В таблице 6 в зависимости от величины ω указаны значения γ_{TC} и соответствующего этому уровню нагрузки эксцентриситета e_s при начальной погиби стержня $w_0 = 0.5$ *см*.

Таблица 6 – Прямоугольник, $\lambda=115.47$; $\varepsilon_{кр}=0.7402e\text{-}3$; $\varepsilon_{TC}=\varepsilon_{TP}=1.0e\text{-}3$; $w_0=0.5$

	Параметр жесткости ω						
	$\omega=0.001$	$\omega=0.005$	$\omega=0.0075$	$\omega=0.01$	$\omega=0.05$	$\omega=0.1$	$\omega=1.0$
γ_{TC}	0.106	0.288	0.338	0.352	0. 346	0. 345	0.343
e_s	1.955	0.617	0.498	0.472	0.483	0.486	0.490

Из таблицы видно, что допустимая нагрузка γ_T при мягкой прокладке заметно снижается, эксцентриситет приложения нагрузки в зависимости от ω проходит через некоторый минимум. В целом результаты расчетов соответствуют предыдущим схемам.

3 Заключение

Рассмотрено поведение упругого шарнирно-опертого стержня с гибкостью выше критической при продольном нагружении в условиях наличия различных геометрических несовершенств стержня и приложения нагрузки. Результаты расчетов показывают, что работоспособность стержня может нарушаться при нагрузке ниже критической, причем переход материала в пластическое состояние может произойти

https://doi.org/10.36773/1818-1112-2025-136-1-110-115

первоначально как в сжатой, так и растянутой зоне сечения в зависимости от соотношения величин пределов текучести на сжатие и растяжение. С ростом отклонений от идеализированного случая допустимые нагрузки монотонно уменьшаются. Для реальных уровней несовершенств ограничение на действующие нагрузки можно задавать по результатам решения задачи в линейном приближении, не выходя за рамки принятых предположений сопротивления материалов.

Большое различие в уровнях γ_T при фактически трудно контролируемых параметрах несовершенств определяет значительный разброс экспериментальных данных по критическим нагрузкам и подчеркивает сложный статистический характер результатов испытаний.

Список цитированных источников

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 986 с.
2. Болотин, В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : Наука, Физматгиз, 1961. – 339 с.
3. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М. : Наука, 1967. – 420 с.
4. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – Т. 1. – 364 с.
5. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.
6. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев [и др.]. – М. : Машгиз, 1952. – Т. 2. – 862 с.
7. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 514 с.
8. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1978. – 744 с.
9. Курс сопротивления материалов : в 2 ч. / М. М. Филоненко-Бородич, С. М. Изюмов, Б. А. Олисов [и др.]. – М. : ГИТТЛ, 1956. – Ч. I. – 644 с.
10. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1965. – 856 с.
11. Снитко, Н. К. Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области / Н. К. Снитко. – Л. : Изд-во литературы по строительству,1968. – 247 с.
12. Shanley, F. R. Inelastic column theory / F. R. Shanley // Journal of the Aeronautical Science. – 1947. – Vol. 14, № 5. – P. 261–268. – DOI: 10.2514/8.1346.
13. Холодарь, Б. Г. Описание процесса потери устойчивости прямого упругого стержня / Б. Г. Холодарь // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 2. – С. 30–35.
14. Холодарь, Б. Г. Потеря устойчивости стержня как задача динамики продольно-поперечного изгиба / Б. Г. Холодарь // III Международная научно-техническая конференция “Теория и практика исследований и проектирования в строительстве с применением систем автоматизированного проектирования (САПР)”, Брест, 29–30 марта 2019 г. Сборник статей. – Брест : БрГТУ, 2019. – С. 109–112.
15. Buckling problem for a rod longitudinally compressed by a force smaller than the Euler critical force / A. K. Belyaev, N. F. Morozov, P. E. Tovstik, T. P. Tovstik // Mechanics of Solids. – 2016. – Vol. 51. – P. 263–272. – DOI: 10.3103/S0025654416030031.
16. Brzuzy, A. Stability analysis of steel compression members under shock loads / A. Brzuzy, G. Bak // Bulletin of the Military University of Technology. – 2018. – Vol. 67. – P. 107–125. – DOI:10.5604/01.3001.0011.8051.
17. Xiaochun Zhang. Study on Stability of Elastic Compression Bending Bar in Viscoelastic Medium / Zhang Xiaochun, Hu Jianhan, Chen Shuyang // Appl. Sci. – 2023. – Vol. 13. – P. 11111. – DOI: 10.3390/app131911111.
18. Dhakal, R. P. Determination of Buckling Length of Reinforcing Bars Based on Stability Analysis / R. P. Dhakal, K. Maekawa // Transactions of the Japan Concrete Institute. – 2000. – Vol. 22 (3). – P. 73–79.
19. Kashani, M. M. Inelastic buckling of reinforcing bars: A state-of-the-art review of existing models and opportunities for future research / M. M. Kashani // Construction and Building Materials. – 2024. – Vol. 411. – P. 134634. – DOI:10.1016/j.conbuildmat.2023.134634.
20. Cosenza, E. Experimental behaviour and numerical modelling of smooth steel bars under compression / E. Cosenza, A. Prota // Journal of Earthquake Engineering. – 2006. – Vol. 10 (3). – P. 313–329. – DOI: 10.1080/13632460609350599.

References

1. Vol'mir, A. S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem / A. S. Vol'mir. – M. : Nauka, 1967. – 986 s.
2. Bolotin, V. V. Nekonservativnye zadachi teorii uprugoj ustojchivosti / V. V. Bolotin. – M. : Nauka, Fizmatgiz, 1961. – 339 s.
3. Panovko, YA. G. Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem. Sovremennye koncepcii, paradoksy i oshibki / YA. G. Panovko, I. I. Gubanova. – M. : Nauka, 1967. – 420 s.
4. Timoshenko, S. P. Soprotivlenie materialov / S. P. Timoshenko. – M. : Nauka, 1965. – T. 1. – 364 s.
5. Timoshenko, S. P. Soprotivlenie materialov / S. P. Timoshenko. – M. : Nauka, 1965. – T. 2. – 480 s.
6. Osnovy sovremennyh metodov rascheta na prochnost' v mashinostroenii / S. D. Ponomarev, V. L. Biderman, K. K. Liharev [i dr.]. – M. : Mashgiz, 1952. – T. 2. – 862 s.
7. Feodos'ev, V. I. Soprotivlenie materialov / V. I. Feodos'ev. – M. : Nauka, 1986. – 514 s.
8. Rabotnov, YU. N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela / YU. N. Rabotnov. – M. : Nauka, 1978. – 744 s.
9. Kurs soprotivleniya materialov : v 2 ch. / M. M. Filonenko-Borodich, S. M. Izyumov, B. A. Olisov [i dr.]. – M. : GITTL, 1956. – CH. I. – 644 s.
10. Belyaev, N.M. Soprotivlenie materialov / N. M. Belyaev. – M. : Nauka, 1965. – 856 s.
11. Snitko, N. K. Ustojchivost' sterzhnevyh sistem v uprugo-plasticheskoj oblasti / N. K. Snitko. – L. : Izd-vo literatury po stroitel'stvu,1968. – 247 c.
12. Shanley, F. R. Inelastic column theory / F. R. Shanley // Journal of the Aeronautical Science. – 1947. – Vol. 14, № 5. – P. 261–268. – DOI: 10.2514/8.1346.
13. Holodar', B. G. Opisanie processa poteri ustojchivosti pryamogo uprugogo sterzhnya / B. G. Holodar' // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. – 2019. – № 2. – S. 30–35.
14. Holodar', B. G. Poterya ustojchivosti sterzhnya kak zadacha dinamiki prodol'no-poperechnogo izgiba / B. G. Holodar' // III Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferenciya “Teoriya i praktika issledovanij i proektirovaniya v stroitel'stve s primeneniem sistem avtomatizirovannogo proektirovaniya (SAPR)”, Brest, 29–30 marta 2019 g. Sbornik statej. – Brest : BrGTU, 2019. – S. 109–112.
15. Buckling problem for a rod longitudinally compressed by a force smaller than the Euler critical force / A. K. Belyaev, N. F. Morozov, P. E. Tovstik, T. P. Tovstik // Mechanics of Solids. – 2016. – Vol. 51. – P. 263–272. – DOI: 10.3103/S0025654416030031.
16. Brzuzy, A. Stability analysis of steel compression members under shock loads / A. Brzuzy, G. Bak // Bulletin of the Military University of Technology. – 2018. – Vol. 67. – P. 107–125. – DOI: 10.5604/01.3001.0011.8051.
17. Xiaochun Zhang. Study on Stability of Elastic Compression Bending Bar in Viscoelastic Medium / Zhang Xiaochun, Hu Jianhan, Chen Shuyang // Appl. Sci. – 2023. – Vol. 13. – P. 11111. – DOI: 10.3390/app131911111.
18. Dhakal, R. P. Determination of Buckling Length of Reinforcing Bars Based on Stability Analysis / R. P. Dhakal, K. Maekawa // Transactions of the Japan Concrete Institute. – 2000. – Vol. 22 (3). – P. 73–79.
19. Kashani, M. M. Inelastic buckling of reinforcing bars: A state-of-the-art review of existing models and opportunities for future research / M. M. Kashani // Construction and Building Materials. – 2024. – Vol. 411. – P. 134634. – DOI:10.1016/j.conbuildmat.2023.134634.
20. Cosenza, E. Experimental behaviour and numerical modelling of smooth steel bars under compression / E. Cosenza, A. Prota // Journal of Earthquake Engineering. – 2006. – Vol. 10 (3). – P. 313–329. – DOI: 10.1080/13632460609350599.

Материал поступил 10.01.2025, одобрен 28.02.2025, принят к публикации 28.02.2025