УДК 519.23/.24+624.046

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ ВЫБОРОК С ЗАДАННОЙ ДОСТОВЕРНОСТЬЮ

С. С. Дереченник[1], Н. Н. Мешечек[2]

[1] *К. т. н., доцент, заведующий кафедрой электронных вычислительных машин и систем УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: ssderechennik@gmail.com*

[2] *Аспирант, старший преподаватель кафедры электронных вычислительных машин и систем УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: meshechek88@gmail.com*

Реферат

В силу случайной природы функционирования реальных технических систем как физических объектов, их состояние работоспособности, определяемое как разность между сопротивлением и внешней нагрузкой, не может быть определено абсолютно точно. В практических задачах анализа надежности строительных конструкций оценивание параметров сопротивления и нагрузок выполняется на основе сравнительно малых выборках результатов реальных измерений, статистический анализ которых обычно связан с построением эмпирических функций распределения. Известные классические методы построения такой функции не позволяют определять, ни тем более задавать, доверительную вероятность (статистическую обеспеченность) получаемых результатов.

Предложены два метода оценивания эмпирической функции распределения, основанные на порядковых статистиках: достоверная оценка квантилей искомой выбранного уровня, а также оценка уровня квантили для имеющихся точек (данных выборки). Первый метод связан с численным восстановлением функции распределения квантили, второй – с необходимостью численного решения обратной непараметрической задачи для самой эмпирической функции распределения. Оба метода включают задание необходимого уровня доверительной вероятности результата. Показана их эффективность для малых выборок эмпирических данных.

Ключевые слова: эмпирическая функция распределения, непараметрический метод, малая выборка, порядковая статистика, квантиль, доверительная вероятность.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF ESTIMATING THE EMPIRICAL DISTRIBUTION FUNCTION FOR SMALL SAMPLES WITH A GIVEN CONFIDENCE

S. S. Derechennik, N. N. Meshechek

Abstract

Due to the random nature of the functioning of real technical systems as physical objects, their state of operability, defined as the difference between resistance and external load, cannot be determined absolutely accurately. In practical tasks of analyzing the reliability of building structures, the estimation of resistance and load parameters is performed on the basis of relatively small samples of real measurement results, the statistical analysis of which is usually associated with the construction of empirical distribution functions. The well-known classical methods of constructing such a function do not allow us to determine, much less set, the confidence probability (statistical security) of the results obtained.

Two methods of estimating the empirical distribution function based on ordinal statistics are proposed: a reliable estimate of the quantiles of the desired selected level, as well as an estimate of the quantile level for available points (sample data). The first method is associated with the numerical reconstruction of the quantile distribution function, the second with the need for a numerical solution of the inverse nonparametric problem for the empirical distribution function itself. Both methods involve setting the required confidence level of the result. Their effectiveness is shown for small samples of empirical data.

Keywords: empirical distribution function, nonparametric method, small sample, ordinal statistics, quantile, confidence probability.

Введение

Согласно действующим нормативным документам, надежность технических систем при их внезапных отказах, в частности механических отказах, определяется вероятностью (риском) потери элементом (элементами) системы своей несущей способности в условиях некоторого внешнего воздействия (нагрузки) окружающей среды. Поэтому исходными данными для расчета надежности могут выступать оценки несущей способности элементов исходя из параметров примененных материалов, а также оценки параметров нагруженности элементов (частей конструкции). При этом такие оценки могут выполняться расчетным или экспериментальным путем на различных стадиях жизненного цикла объекта – при проектировании, создании, а также в процессе эксплуатации [1].

Функционирование реальных технических систем как физических объектов содержит в себе элементы случайности. С точки зрения несущей способности (прочности), она проявляется в разбросе размеров изделий, локальных неоднородностях структуры и состава материалов, изменчивости технологических условий обработки. Внешние нагрузки также зависимы от стохастичности условий функционирования объекта, связанной со случайными проявлениями воздействий окружающей среды. Указанные характеристики, в подавляющем большинстве случаев, следует рассматривать как непрерывные случайные величины. В теории и практике анализа надежности наиболее распространен подход, основанный на принятии, для описания генеральной совокупности случайной величины, некоторой параметрической вероятностной модели. Однако реальные инженерные данные далеко не всегда можно рассматривать как выборки из абстрактной генеральной совокупности с известным (например, нормальным) распределением, при этом в практических задачах оценивания искомых параметров прочности или нагрузок, в особенности при наличии малых эмпирических выборок результатов измерений, применимы и вполне эффективны непараметрические (порядковые) статистики [2].

На начальном этапе статистического (как параметрического, так и непараметрического) анализа эмпирических данных обычно требуется определить эмпирическую функцию распределения как оценку (эмпирическую меру) неизвестной функции распределения генеральной совокупности по имеющейся выборке данных измерений.

Оценки эмпирической функции распределения с неизвестной достоверностью

Классическим определением ([3]) эмпирической функции распределения случайной выборки $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ непрерывной случайной величины X является неубывающая ступенчатая функция вероятности $\hat{F}\left(X\right) = \Pr\left(x < X\right)$ с $\hat{F}\left(-\infty\right) = 0$ и $\hat{F}\left(\infty\right) = 1$. Эта функция определяет частотное (эмпирическое) распределение, которое может быть найдено, например, по формуле

$$\hat{F}\left(X\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(x_i < X\right), \tag{1}$$

где функция $I\left(x_i < X\right)$ – индикатор событий, равный 1 при $x_i < X$ и 0 в противном случае.

Для удобства графического построения данной кусочно-непрерывной кумулятивной функции, возрастающей на величину $1/n$ в каждой из точек данных, обычно выполняют ранжирование данных, т. е. преобразуют исходную выборку, например временной ряд измерений, в вариационный (обычно возрастающий) ряд $\left(x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(r)} \leq \ldots \leq x_{(n)}\right)$, где r – ранг конкретного элемента в ранжированной выборке. Заметим, что операция ранжирования сама по себе является уже действием из аппарата порядковых статистик.

Известно, что функция (1) является несмещенной состоятельной оценкой неизвестной функции распределения $F\left(X\right)$ для гипотетически бесконечной выборки случайной величины. Однако данное теоретическое утверждение формулируется для случая наращивания числа членов выборки (на практике – до 35 и более). При малых же размерах выборок уже интуитивно понятно, что такая оценка оказывается завышенной на правом конце (возрастающего) вариационного выборочного ряда, поскольку, например, из (1) следует, что $\hat{F}\left(X = x_{(n)} < \infty\right) = 1$, но наибольшее значение $x_{(n)}$ в данной выборке, конечно, не является предельным, поэтому не исключено его превышение в другой выборке (либо же при наращивании текущей выборки). Аналогично, равная нулю оценка эмпирической функции распределения левее начала вариационного ряда будет заниженной. Наиболее приближенными к истинным значениям представляются оценки в области среднего, соответствующего величине $F\left(X\right) = 0,5$.

Таким образом, получаемые соотношением вида (1) оценка сопротивления элемента (в левой части вариационного ряда) и оценка внешней нагрузки (в правой) являются неточными. Это весьма проблематично с точки зрения безопасности, поскольку может привести к неверным расчетам вероятности отказа, например к переоценке надежности конструкции [4]. В инженерной практике данная проблема решается путем введения специально калибруемых коэффициентов безопасности. Широко известны также варианты скорректированных формул оценивания эмпирической функции распределения, например (с использованием ранга r элемента упорядоченной выборки):

$$\hat{F}\left(X\right) = \frac{r}{n+1}, \tag{2}$$

$$\hat{F}\left(X\right) = \frac{r+1/2}{n+1}, \tag{3}$$

которые призваны уменьшать систематическую ошибку оценки в левой и правой частях вариационного ряла (т. е. на «хвостах распределения»). Однако все указанные выше методы не дают ответа на важный вопрос: какова статистическая обеспеченность получаемой оценки эмпирической функции, например в виде доверительной вероятности вывода о принадлежности функции некоторому интервалу (например, «вероятность не превышает величину 0,9»)? По нашему мнению, статистические выводы относительно искомой функции распределения (например, верхняя граница функции на ее левом хвосте либо нижняя граница – на правом) должны быть обеспечены конкретным значением доверительной вероятности – затем, чтобы дальнейшие расчеты надежности конструкции и последующие действия имели некоторую хотя бы известную (а лучше задаваемую) меру достоверности. Полагаем, что вывод о надежности конструкции, имеющий требуемую достоверность γ (т. е. сделанный на уровне значимости $\alpha = 1-\gamma$), должен основываться на использовании эмпирических функций распределения (или/и иных оценок, например, квантилей распределения уровня $0 < p < 1$), найденных с той же достоверностью.

Абсолютно достоверный расчет надежности конструкции теоретически выполним дишь при известных (теоретических) функциях распределения, как для случайной величины сопротивления элемента, так и для действующей на него нагрузки. Такой метод расчета известен как метод предельных состояний, но на практике применим только в варианте «полувероятностный метод», поскльку теоретические функции распределения неизвестны и заменяются их оценками (различного вида, зачастую с использованием произвольно выбранных типовых функций), обеспеченность которых также неизвестна. Поэтому данный метод требует введения уже упомянутых коэффициентов безопасности – по сути, дополнительных коэффициентов конструкционного запаса. Увеличение коэффициентов ведет к повышению достоверности выводов о надежности (безопасности), но самое важное состоит в том, что сама достоверность остается неизвестной.

Достоверная оценка заданных квантилей эмпирической функции распределения

Оценивание квантилей распределения случайной величины с известной достоверностью может быть выполнено с применением аппарата непараметрических (порядковых, ранговых) статистик [5]. Здесь каждый результат эмпирической выборки, как член вариационного ряда $x_{(r)}$, имеет ранг $1 \leq r \leq n$ (является r-й порядковой статистикой), а квантиль X_p уровня p определяется как принадлежащая непараметрическому интервалу $\left(x_{(r)}, x_{(s)}\right]$ с известной доверительной вероятностью $\gamma\left(r \ldots s\right)$. В частном случае, если интервалы определены соседними статистиками $x_{(r)}$ и $x_{(r+1)}$, доверительная вероятность определяется из биномиального распределения:

$$\gamma\left(r, r+1\right) = C_n^r\, p^r \left(1-p\right)^{n-r}. \tag{4}$$

Отметим, что значению $r = n$ соответствует вероятность $\gamma\left(n,\, n+1\right) = \gamma\left(n, \ldots\right)$ принадлежности квантили теоретически бесконечному интервалу $\left(x_{(n)}, \infty\right)$, а значению $r = 0$ – вероятность $\gamma\left(0, 1\right) = \gamma\left(\ldots, 1\right)$ принадлежности физически корректному (например, для параметра прочности материала) интервалу $\left(0, x_{(1)}\right)$. В таблице 1 приведены примеры расчета доверительныых вероятностей принадлежности квантилей некоторых уровней доверительным интервалам для выборок размера $n = 7$.

Таблица 1 – Вероятность принадлежности квантилей непараметрическим интервалам

Обозначение вероятности принадлежности квантили X_p к интервалу $[X_{(r)}, X_{(s)}]$	$\gamma(\ldots,1)$	$\gamma(1,2)$	$\gamma(2,3)$	$\gamma(3,4)$	$\gamma(4,5)$	$\gamma(5,6)$	$\gamma(6,7)$	$\gamma(7,\ldots)$
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,05$	0,6983	0,2573	0,0406	0,0036	0,0002	6E-06	1E-07	8E-10
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,10$	0,4783	0,3720	0,1240	0,0230	0,0026	0,0002	6E-06	1E-07
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,25$	0,1335	0,3115	0,3115	0,1730	0,0577	0,0115	0,0013	6E-05
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,50$	0,0078	0,0547	0,1641	0,2734	0,2734	0,1641	0,0547	0,0078
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,80$	1E-05	0,0004	0,0043	0,0287	0,1147	0,2753	0,367	0,2097
Значение вероятности для квантили уровня $p=0,90$	1E-07	6E-06	0,0002	0,0026	0,023	0,124	0,372	0,4783

Из таблицы 1 следует крайне малая вероятность попадания квантилей низкого уровня в правую (верхнюю) часть вариационного ряда, равно как и квантилей высокого уровня – в левую (нижнюю) его часть. Очевидна также «зеркальность» (слева направо / справа налево) вычисленных значений для квантилей, сумма уровней которых равна единице (например, для квантилей уровней $p=0,1$ и $p=0,9$), равно как и симметричность значений в строке таблицы, соответствующей медиане искомого распределения ($p=0,5$) относительно серединного (четвертого) элемента вариационного ряда.

Суммируя значения вероятностей (4) по интервалам слева направо (от «нулевого» до заданного), находим оценку $\hat{G}(X_p)$ функции распределения искомой квантили во всех точках, определенных имеющимися статистиками $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$:

$$\begin{cases} \hat{G}(X_p = x_{(1)}) = \gamma(\ldots,1), \\ \hat{G}(X_p = x_{(r+1)}) = \hat{G}(X_p = x_{(r)}) + \gamma(r,r+1). \end{cases} \tag{5}$$

Данная точечная оценка позволяет также путем интерполяции (сглаживания) найти значения функции $\hat{G}(X_p)$ в промежуточных точках непараметрических интервалов, для оценки же функции за пределами интервалов требуется уже процедура экстраполяции. Выбор метода интерполяции и экстраполяции является самостоятельной задачей и в данной статье не рассматривается. Однако ранее нами была показана возможность использования линейных методов сглаживания эмпирических данных с использованием нелинейного преобразования шкалы вероятности [6, 7]. Были найдены эффективные линейные соотношения для поиска, с заданной достоверностью, квантили весьма низкого уровня ($p=0,5$), например в качестве оценки характеристической прочности бетона при малых $(3 \le n \le 15)$ выборках эмпирических данных [8, 9]. С использованием численнного имитационного моделирования возможно даже восстанавливать функцию распределения квантили в диапазоне доверительной вероятности $\gamma = 0,05\ldots0,95$ с шагом 0,05 [10].

Таким образом, значения функции (5) определяют доверительную вероятность непревышения заданной квантилью эмпирической функции распределения значения, соответствующего каждой из имеющихся точек вариационного ряда, а с использованием интерполяции и экстраполяции – и другим значениям аргумента. Это позволяет находить квантили любого заданного уровня искомого распределения $F(X)$ на известном уровне достоверности, а значит, оценивать саму функцию распределения в целом с известной достоверностью. Так, например, при $\hat{G}(X_p) = 0,5$ получаем медианную оценку некоторого набора квантилей X_p (например, децилей с $p = 0,1;\ 0,2;\ \ldots;\ 0,9$) искомой функции распределения. Значения $\hat{G} > 0,5$ соответствуют уровню достоверности оценки таких квантилей по их правой границе, соответственно искомой функции распределения $F(X)$ – по нижней границе. Если суммировать вероятности (4) по интервалам справа налево, то доверительной вероятности оценки левой границы квантилей, т. е. верхней границы функции распределения $F(X)$ будет соответствовать величина $1-\hat{G}$.

Метод оценки заданных квантилей эмпирической функции распределения наиболее эффективен в отношении конкретной квантили, например уровня $0,05$ – для оценивания характеристической прочности материала (бетона) или уровня $0,98$ – для оценивания характеристической климатической нагрузки (веса снегового покрова) в задачах надежности строительных конструкций. Для построения же всей функции $F(X)$ метод менее эффективен, поскольку требуется сглаживание для каждой выбранной квантили, что обусловливает определенную трудоемкость данной процедуры. Следует отметить, что параметры сглаживания для оценки функции $\hat{G}(X_p)$ квантили некоторого уровня p можно использовать (в зеркальном представлении) также и в отношении квантили уровня ($1-p$).

Поиск квантили эмпирической функции распределения с заданной достоверностью (обратная непараметрическая задача)

Сформулируем обратную по отношению к (5) задачу: найти уровни p квантилей, оценки которых, выполненные с заданной достоверностью γ, будут совпадать с конкретными имеющимися порядковыми статистиками $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$.

Например, для оценивания медианы функции распределения $F(X)$ первое из соотношений (5), т. е. задача для первой статистики $x_{(1)}$, становится аналитически разрешимым уравнением относительно p вида:

$$\hat{G}(X_p = x_{(1)}) = \gamma(\ldots,1) = (1-p)^n = 0,5. \tag{6}$$

Аналогичное, аналитически разрешимое уравнение имеем и для последней статистики $x_{(n)}$ ряда. Для всех же порядковых статистик ранга $1<r<n$ получаемые уравнения вида

$$\hat{G}(X_p = x_{(r)}) = \sum_{i=0}^{r-1} \gamma(i,i+1) = \sum_{i=0}^{r-1} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} = 0,5 \tag{7}$$

аналитического решения в общем случае не имеют.

Тем не менее, такие уравнения решаются численными методами, поэтому возможно в каждой из имеющихся точек вариационного ряда, получить либо медианную оценку уровня квантили, либо оценку уровня квантили снизу, сверху или в двустороннем интервале с заданной обспеченностью (доверительной вероятностью). Тем самым достигается (с такой же обеспеченностью) соответствующая оценка эмпирической функции распределения в точках вариационного ряда. При необходимости затем можно выполнять сглаживание (интерполяцию, экстраполяцию) полученных результатов, однако такая процедура будет однократной, в отличие от сглаживания функции (5) в отношении каждой выбираемой квантили.

Пример численного решения обратной непараметрической задачи поиска уровня квантили для выборки данных из $n = 7$ измерений случайной величины X (конкретные измеренные значения необходимы лишь для графического представления эмпирической функции распределения), в сравнении с грубыми оценками функции распределения вида (2) и (3), представлен в таблице 2. Ступенчатые эмпирические функции вида (2) и (3), а также медианная оценка этой функции в точках данных – для некоторого условного ряда измерений $\left(1,0;\,1,6;\,2,6;\,3,6;\,4,6;\,5,8;\,6,7\right)$ – представлены на рисунке 1.

Таблица 2 – Результаты оценивания эмпирической функции распределения случайной выборки из $n = 7$ измерений

Метод оценки функции распределения	Значение функции распределения для точек вариационного ряда $x_{(r)}$						
	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$
Грубая оценка							
$\hat{F}(X) = r/(n+1)$	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875
$\hat{F}(X) = (r+1/2)/(n+1)$	0,188	0,313	0,438	0,563	0,688	0,813	0,938
Численное решение уравнений (6), (7) с заданной достоверностью γ							
$\gamma = 0,5$ (медианная оценка)	0,094	0,228	0,364	0,500	0,636	0,772	0,906
$\gamma = 0,4$ (верхняя граничная оценка)	0,123	0,268	0,410	0,546	0,680	0,808	0,930
$\gamma = 0,6$ (нижняя граничная оценка)	0,070	0,192	0,320	0,454	0,590	0,732	0,877
$\gamma = 0,1$ (верхняя граничная оценка)	0,280	0,453	0,597	0,721	0,830	0,921	0,985
$\gamma = 0,9$ (нижняя граничная оценка)	0,015	0,079	0,170	0,279	0,403	0,547	0,720

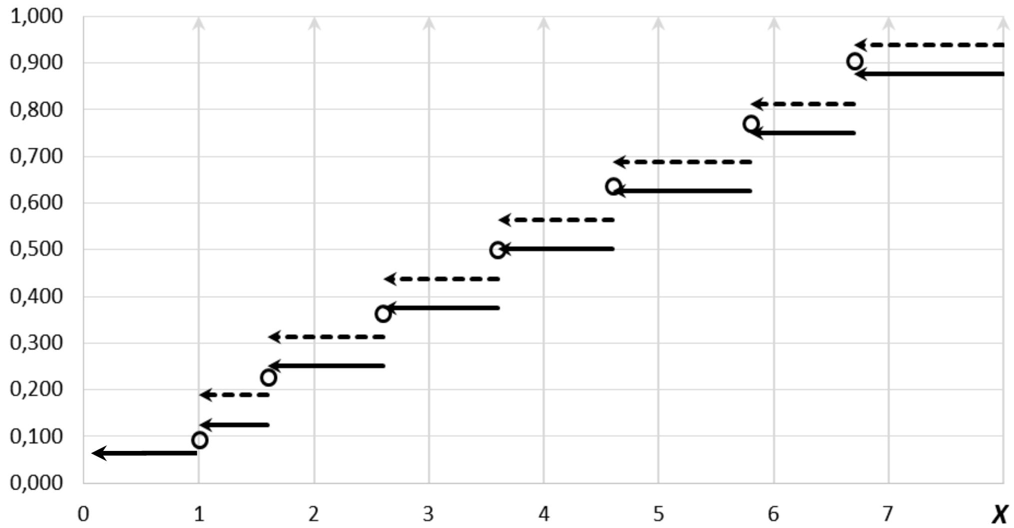

Рисунок 1 – Оценка эмпирической функции распределения: сплошные линии – приближение вида (2); пунктирные линии – приближение вида (3); кружки – результат медианной оценки путем численного решения непараметрической задачи

Из рисунка 1 следует, что известные грубые оценки эмпирической функции распределения на выборках небольшого объема дают в целом неточные результаты и могут считаться приемлемыми лишь в области средних (точнее, медианных) значений. В нижней и верхней частях вариационного ряда, т. е. на «хвостах» распределения, отличия значений функции от значений, найденных численным непараметрическим методом, становятся существенными и могут повлиять на дальнейшую аппроксимацию с целью интерполяции и экстраполяции функции. Для улучшения качества аппроксимации за пределами размаха выборки эмпирических данных можно рекомендовать также дополнительное использование предыдущего метода – достоверной оценки квантилей заданного (малого или высокого уровня – соответственно, на левом или правом хвостах распределения).

Из таблицы 2 следует определенная «симметричность» найденных численных решений. Так, например, сумма значения 0,123 уровня квантили для точки $x_{(1)}$ с $\gamma = 0,4$ и значения 0,877 уровня квантили для точки $x_{(7)}$ с $\gamma = 0,6$ (т. е. для случая 0,4 + 0,6 = 1) составляет ровно единицу. Такова же сумма симметричных значений (относительно серединной – четвертой в данном примере точки данных) в численном решении для медианной оценки. Данный факт снижает объем, а значит и трудоемкость задачи численного решения обратной задачи для больших объемов выборки.

Заключение

Предложенные методы оценивания эмпирической функции распределения, основанные на непараметрических (порядковых) статистиках, весьма эффективны для случая выборок данных малого объема. Важнейшим их достоинством является возможность задания достоверности (статистической обеспеченности) одно- или двусторонней интервальной оценки функции. Это позволяет затем аппроксимировать эмпирическую функцию распределения, например медианной оценкой, либо в задачах анализа надежности конструкций, верхней граничной оценкой для функции распределения прочности (на левом хвосте распределения) и нижней граничной оценкой для функции распределения нагрузки (на правом хвосте распределения). Проблема выбора подходящей функции аппроксимации (линейного сглаживания с некоторым нелинейным преобразованием координатных осей) является задачей дальнейших исследований.

Список цитированных источников

1. Надежность в технике. Расчет надежности. Основные положения : ГОСТ 27.301-95. – Взамен ГОСТ 27.410-87 ; введ. 01.01.1997. – Минск : Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 1996. – 19 с.
2. Дереченник, С. С. Возможности применения порядковых статистик в задачах обеспечения надежности технических объектов / С. С. Дереченник // Цифровая среда: технологии и перспективы : материалы междунар. науч.-техн. конф., Брест, 31 окт. 2022 г. – Брест : БрГТУ, 2022. – С. 7–13.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
4. Дереченник, С. С. Решение задачи анализа функции состояния на основе приближения хвостовых частей распределений случайных величин нагрузки и сопротивления / С. С. Дереченник, Н. Н. Мешечек // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2023. – № 1 (130). – С. 7–9.
5. David, H. A. Order statistics / H. A. David. – John Wiley & Sons, New York, 1981. – 360 p.
6. Тур, В. В. О применении критериев соответствия прочности бетона согласно СТБ EN 206-1-2000 / В. В. Тур, С. С. Дереченник, А. С. Дереченник // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. науч. тр. / БелНИИС. – 2012. – С. 152–177.
7. Статистический контроль прочности бетона на сжатие в соответствии с требованиями СТБ EN 206-1:2000 и ГОСТ 18105-2010 (EN 206-1:2000; NEQ) / В. В. Тур [и др.] // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2014. – № 1 (76). – С. 113–136.
8. Тур, В. В. Новый критерий для оценивания соответствия прочности бетона в условиях ограниченной выборки результатов испытаний / В. В. Тур, С. С. Дереченник // Строительство и реконструкция. – 2016. – № 6 (68). – С. 71–84.
9. Tur, V. V. An Innovation Conformity Criterion for Assessment of the Concrete Strength Under Uncertainty Conditions / V. V. Tur, S. S. Derechennik // High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet: Proc. of the 2017 fib Symposium, held in Maastricht, The Netherlands, June 12–14, 2017 / D. A. Hordijk, M. Luković (eds.). – Springer International Publishing AG, 2018. – P. 628–1635.
10. Дереченник, С. С. Новый подход к оцениванию in-situ характеристической прочности бетона в существующих железобетонных конструкциях при ограниченном количестве результатов полевых испытаний / С. С. Дереченник, В. В. Тур // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2018. – № 1 (109). – С. 109–115.

References

1. Nadezhnost' v tekhnike. Raschet nadezhnosti. Osnovnye polozheniya : GOST 27.301-95. – Vzamen GOST 27.410-87 ; vved. 01.01.1997. – Minsk : Mezhgosudarstvennyj sovet po standartizacii, metrologii i sertifikacii, 1996. – 19 s.
2. Derechennik, S. S. Vozmozhnosti primeneniya poryadkovyh statistik v zadachah obespecheniya nadezhnosti tekhnicheskih ob"ektov / S. S. Derechennik // Cifrovaya sreda: tekhnologii i perspektivy : materialy mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., Brest, 31 okt. 2022 g. – Brest : BrGTU, 2022. – S. 7–13.
3. Korn, G. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov / G. Korn, T. Korn. – M. : Nauka, 1978. – 832 s.
4. Derechennik, S. S. Reshenie zadachi analiza funkcii sostoyaniya na osnove priblizheniya hvostovyh chastej raspredelenij sluchajnyh velichin nagruzki i soprotivleniya / S. S. Derechennik, N. N. Meshechek // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. –2023. – № 1 (130). – S. 7–9.
5. David, H. A. Order statistics / H. A. David. – John Wiley & Sons, New York, 1981. – 360 p.
6. Tur, V. V. O primenenii kriteriev sootvetstviya prochnosti betona soglasno STB EN 206-1-2000 / V. V. Tur, S. S. Derechennik, A. S. Derechennik // Problemy sovremennogo betona i zhelezobetona : sb. nauch. tr. / BelNIIS. – 2012. – S. 152–177.
7. Statisticheskij kontrol' prochnosti betona na szhatie v sootvetstvii s trebovaniyami STB EN 206-1:2000 i GOST 18105-2010 (EN 206-1:2000; NEQ) / V. V. Tur [i dr.] // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2014. – № 1 (76). – S. 113–136.
8. Tur, V. V. Novyj kriterij dlya ocenivaniya sootvetstviya prochnosti betona v usloviyah ogranichennoj vyborki rezul'tatov ispytanij / V. V. Tur, S. S. Derechennik // Stroitel'stvo i rekonstrukciya. – 2016. – № 6 (68). – S. 71–84.
9. Tur, V. V. An Innovation Conformity Criterion for Assessment of the Concrete Strength Under Uncertainty Conditions / V. V. Tur, S. S. Derechennik // High Tech Concrete: Where Technology and Engineering Meet: Proc. of the 2017 fib Symposium, held in Maastricht, The Netherlands, June 12–14, 2017 / D. A. Hordijk, M. Luković (eds.). – Springer International Publishing AG, 2018. – P. 1628–1635.
10. Derechennik, S. S. Novyj podhod k ocenivaniyu in-situ harakteristicheskoj prochnosti betona v sushchestvuyushchih zhelezobetonnyh konstrukciyah pri ogranichennom kolichestve rezul'tatov polevyh ispytanij / S. S. Derechennik, V. V. Tur // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2018. – № 1 (109). – S. 109–115.

Материал поступил 11.03.2024, одобрен 27.03.2024, принят к публикации 27.03.2024